เอกลักษณ์บางประการของลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัสโดยวิธีเมทริกซ์

On Some Identities of Balancing-Like and Lucas-Balancing-Like Sequences by the Matrix Method

สานิตย์ ฤทธิเดช* ธีรพล บัวทอง และ ศิรฉัตร ทิพย์ศรี

Sanit Ritthidej*, Theerapon Buatong, & Sirachat Tipsri

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา 90000

Faculty of Science and Technology, Songkhla Rajabhat University, Songkhla 90000

Submitted 30/03/2023 ; Revised 15/05/2023 ; Accepted 18/05/2023

บทคัดย่อ

ลำดับคล้ายสมดุล และลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ได้ถูกนิยามในรูป $\left\{\frac{\sigma_k}{2}\right\}$ และ $\{N_k\}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k โดยที่ N_k และ σ_k เป็นผลเฉลยของสมการเพลล์ $N^2-12\sigma^2=1$ และลำดับทั้งสอง กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น $L_{n+1}=4L_n-L_{n-1}$ และ $M_{n+1}=4M_n-M_{n-1}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_0=0$, $L_1=1$ และ $M_0=1$, $M_1=2$ ตามลำดับ สำหรับงานวิจัยนี้ ได้นิยามเมทริกซ์ Q_L และ Q_M เพื่อใช้สำหรับสร้างสูตรบิเนต และใช้เมทริกซ์เหล่านี้สร้างเอกลักษณ์ต่าง ๆ ของลำดับคล้ายสมดุล และลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส

คำสำคัญ: ลำดับคล้ายสมดุล ลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส วิธีเมทริกซ์

***ผู้ประสานงานหลัก (Corresponding Author)**

E-mail: sanit.ri@skru.ac.th

Abstract

Balancing-like and Lucas-balancing-like sequences are defined by $\left\{\frac{\sigma_k}{2}\right\}$ and $\{N_k\}$ for the positive integer k, where N_k and σ_k are solutions of Pell's equation $N^2-12\sigma^2=1$. These sequences are determined as linear recurrence relations $L_{n+1}=4L_n-L_{n-1}$ and $M_{n+1}=4M_n-M_{n-1}$ with initial conditions $L_0=0$, $L_1=1$ and $M_0=1$, $M_1=2$ for the positive integer n , respectively. In this paper, some identities of balancing-like and Lucas-balancing-like sequences are obtained by using Binet's formulas, which are formulated by matrices Q_L and Q_M.

Keywords: balancing-like sequence, Lucas-balancing-like sequence, matrix method

บทนำ

ในช่วงหลายปีที่ผ่านมา ลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนเต็มบวก ได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง และที่รู้จักกันดี ได้แก่ ลำดับฟีโบนักชี $\{F_n\}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ อีกลำดับที่คล้ายกัน คือ ลำดับลูคัส $\{L_n\}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$ แต่ละพจน์ของลำดับฟีโบนักชี และลำดับลูคัส เรียกว่า จำนวนฟีโบนักชี และจำนวนลูคัส ตามลำดับ

Behera และ Panda [1] ได้นิยามเกี่ยวกับจำนวนสมดุล (balancing number) สำหรับ $n \in \mathbb{Z}^+$ เรียก n ว่า จำนวนสมดุล ถ้า n สอดคล้องกับสมการ

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)$$

สำหรับบาง $r \in \mathbb{Z}^+$ และเรียก r ว่า ตัวทำให้สมดุล (balancer) ที่สมนัยกับจำนวนสมดุล n และได้กำหนดจำนวนสมดุล ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \tag{*}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $B_0 = 0$ และ $B_1 = 1$ และ B_n เป็นพจน์ที่ n ของจำนวนสมดุล

Panda [2] ได้นิยามจำนวนสมดุล-ลูคัส ในรูปสมการ $C_n = \sqrt{8n^2 + 1}$ โดยที่ n เป็นจำนวนสมดุล และสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1} \tag{**}$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $C_0 = 1$ และ $C_1 = 3$

Ray [3] ได้นำความสัมพันธ์เวียนเกิดจากสมการ (**) นิยามให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ Q_C และหาเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้อง โดยที่เมทริกซ์ Q_C เขียนอยู่ในรูป

$$Q_B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ray [4] ได้นำความสัมพันธ์เวียนเกิดจากสมการ (**) มานิยามให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ Q_C และหาเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้อง โดยที่เมทริกซ์ Q_C เขียนอยู่ในรูป

$$Q_C = \begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Panda และ Panda [5] ได้แนะนำเกี่ยวกับลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ในรูปของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน N_k และ σ_k ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ $N^2 - 12\sigma^2 = 1$ ที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม และได้แสดงลำดับคล้ายสมดุล และลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ซึ่งได้ให้ $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นสัญลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุลที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$L_{n+1} = 4L_n - L_{n-1} \tag{1}$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $L_0 = 0$ และ $L_1 = 1$

ให้ $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นสัญลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$M_{n+1} = 4M_n - M_{n-1} \tag{2}$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $M_0 = 1$ และ $M_1 = 2$

เพอร์มาแนนท์ (permanent) ของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่งนิยามโดย

$$per(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

โดยที่ S_n เป็นกรุปสมมาตรของการเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1,2,\ldots,n\}$ และสามารถดูตัวอย่างใน [6]

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส จะได้ลำดับดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 แสดงค่าของ L_n และ M_n สำหรับจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 8

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	0	1	4	15	56	209	780	2991	10864
M_n	1	2	7	26	97	362	1351	5042	18817

วัตถุประสงค์

เพื่อนำลำดับคล้ายสมดุล และลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส มาประยุกต์เป็นทฤษฎีบทใหม่ โดยวิธี เมทริกซ์

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการทำวิจัยนี้จะนำความสัมพันธ์จากสมการ (1) และ (2) มากำหนดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ Q_L และ Q_M เพื่อใช้ในการหาเอกลักษณ์ต่าง ๆ ของลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส โดยวิธีเมทริกซ์ ดังนี้

1) หาเอกลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุล ที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ Q_L ขนาด 2×2 ซึ่งกำหนดโดย

$$Q_L = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2) หาเอกลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ Q_M ขนาด 2×2 ซึ่งกำหนดโดย

$$Q_M = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ผลการวิจัย

ผลของการวิจัยถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน ได้แก่ เอกลักษณ์บางประการของลำดับคล้ายสมดุล โดยวิธีเมทริกซ์ ในส่วนแรก และเอกลักษณ์บางประการของลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส โดยวิธีเมทริกซ์ ในส่วนที่สอง

เอกลักษณ์บางประการของลำดับคล้ายสมดุล โดยวิธีเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 1 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $Q_L\begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix}$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากสมการ (3) จะได้

$$Q_L\begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2 ให้ Q_L เป็นเมทริกซ์ของลำดับคล้ายสมดุล และสำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$Q_L^n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix}$$

พิสูจน์ สังเกตว่า $Q_L = \begin{pmatrix} L_2 & -L_1 \\ L_1 & -L_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ดังนั้น ทฤษฎีบทนี้ เป็นจริงสำหรับ $n = 1$

สมมติให้ $Q_L^k = \begin{pmatrix} L_{k+1} & -L_k \\ L_k & -L_{k-1} \end{pmatrix}$ เป็นจริง สำหรับ $n = k$

พิจารณา
$$Q_L^{k+1} = Q_L^k Q_L$$
$$= \begin{pmatrix} L_{k+1} & -L_k \\ L_k & -L_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4L_{k+1} - L_k & -L_{k+1} \\ 4L_k - L_{k-1} & -L_k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} L_{k+2} & -L_{k+1} \\ L_{k+1} & -L_k \end{pmatrix}$$

ดังนั้น โดยหลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $Q_L^n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix}$ สำหรับทุก $n \geq 1$

ทฤษฎีบท 3 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\det(Q_L^n) = 1$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากสมการ (3) จะได้ $\det Q_L = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

ดังนั้น $\det(Q_L)^n = (\det Q_L)^n = 1^n = 1$

ทฤษฎีบท 4 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} = 1$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\det(Q_L^n) = \det\begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1}$$

และจาก $\det(Q_L^n) = (\det Q_L)^n = 1$

ดังนั้น $L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} = 1$

ทฤษฎีบท 5 ให้ Q_M เป็นเมทริกซ์ของลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส และ $n \geq 1$ จะได้

$$Q_M^n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix}, & \text{สำหรับ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad (5) \\ 3^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} M_{n+1} & -M_n \\ M_n & -M_{n-1} \end{pmatrix}, & \text{สำหรับ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \quad (6) \end{cases}$$

พิสูจน์ พิจารณา กรณีที่ n เป็นจำนวนคี่

สังเกตว่า $Q_M = \begin{pmatrix} M_2 & -M_1 \\ M_1 & -M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ดังนั้น ทฤษฎีบทนี้ เป็นจริงสำหรับ $n = 1$

สมมติให้ให้ $Q_M^k = 3^{\frac{k-1}{2}}\begin{pmatrix} M_{k+1} & -M_k \\ M_k & -M_{k-1} \end{pmatrix}$ เป็นจริง สำหรับ $n = k$

พิจารณา
$$Q_M^{k+2} = Q_M^k Q_M^2$$
$$= 3^{\frac{k-1}{2}}\begin{pmatrix} M_{k+1} & -M_k \\ M_k & -M_{k-1} \end{pmatrix} 3\begin{pmatrix} 15 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= 3^{\frac{k+1}{2}}\begin{pmatrix} 15M_{k+1} - 4M_k & -4M_{k+1} + M_k \\ 15M_k - 4M_{k-1} & -4M_k + M_{k-1} \end{pmatrix}$$

เนื่องจาก $M_{k+1} = 4M_k - M_{k-1}$ จะได้

$$M_{k+2} = 4M_{k+1} - M_k$$
$$= 4(4M_k - M_{k-1}) - M_k$$
$$= 15M_k - 4M_{k-1}$$

และ $M_{k+3} = 15M_{k+1} - 4M_k$

เพราะฉะนั้น $Q_M^{k+2} = 3^{\frac{k+1}{2}}\begin{pmatrix} M_{k+3} & -M_{k+2} \\ M_{k+2} & -M_{k+1} \end{pmatrix}$

พิจารณา กรณี n เป็นจำนวนคู่

สังเกตว่า $Q_M^2 = \begin{pmatrix} 45 & -12 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 15 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} L_3 & -L_2 \\ L_2 & -L_1 \end{pmatrix}$

ดังนั้น ทฤษฎีบทนี้ เป็นจริงสำหรับ $n = 2$

สมมติให้ $Q_M^k = 3^{\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} L_{k+1} & -L_k \\ L_k & -L_{k-1} \end{pmatrix}$ เป็นจริง $n = k$

พิจารณา $Q_M^{k+2} = Q_M^k Q_M^2$

$$= 3^{\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} L_{k+1} & -L_k \\ L_k & -L_{k-1} \end{pmatrix}3\begin{pmatrix} 15 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{\frac{k+2}{2}}\begin{pmatrix} 15L_{k+1} - 4L_k & -4L_{k+1} + L_k \\ 15L_k - 4L_{k-1} & -4L_k + L_{k-1} \end{pmatrix}$$

เนื่องจาก $L_{k+1} = 4L_k - L_{k-1}$ จะได้

$$\begin{aligned} L_{k+2} &= 4L_{k+1} - L_k \\ &= 4(4L_k - L_{k-1}) - L_k \\ &= 15L_k - 4L_{k-1} \end{aligned}$$

และ $L_{k+3} = 15L_{k+1} - 4L_k$

เพราะฉะนั้น $Q_M^{k+2} = 3^{\frac{k+2}{2}}\begin{pmatrix} L_{k+3} & -L_{k+2} \\ L_{k+2} & -L_{k+1} \end{pmatrix}$

ดังนั้น โดยหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $Q_M^n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix} & \text{สำหรับ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 3^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} M_{n+1} & -M_n \\ M_n & -M_{n-1} \end{pmatrix} & \text{สำหรับ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

สำหรับทุก $n \geq 1$

ทฤษฎีบท 6 สำหรับจำนวนเต็ม n โดยที่ $n \geq 0$ จะได้ สูตรบิเนตของลำดับคล้ายสมดุล และลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ดังนี้

$$L_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{3}} \quad \text{และ} \quad M_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$$

โดยที่ $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ และ $\beta = 2 - \sqrt{3}$

พิสูจน์ ให้ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ จะได้ว่า $\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0$ เป็นสมการลักษณะเฉพาะของ Q_M ดังนั้น จะได้ $\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ และ $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{3}$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ Q_M ซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ และ $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ โดยที่ $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ และ $\beta = 2 - \sqrt{3}$

กำหนดให้ $A = (V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\alpha & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}\beta \end{pmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ซึ่งสอดคล้องกับ $A^{-1}Q_M A = B$ ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้

$$
\begin{aligned}
Q_M^n &= AB^nA^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{3}\alpha)^n & 0 \\ 0 & (-\sqrt{3}\beta)^n \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & -\alpha^n \\ (-\beta)^{n+1} & (-\beta)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}+(-\beta)^{n+1} & -\alpha^n+(-\beta)^n) \\ \alpha^n-(-\beta)^n & -(\alpha^{n-1}+(-\beta)^{n-1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

จากทฤษฎีบท 5 สำหรับ n เป็นจำนวนคี่ จะได้

$$
3^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} M_{n+1} & -M_n \\ M_n & -M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}+\beta^{n+1} & -(\alpha^n+\beta^n) \\ \alpha^n+\beta^n & -(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} M_{n+1} & -M_n \\ M_n & -M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}+\beta^{n+1} & -(\alpha^n+\beta^n) \\ \alpha^n+\beta^n & -(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}) \end{pmatrix}
$$

จากการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ $M_n = \dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$

และจากทฤษฎีบท 5 สำหรับ n เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$
Q_M^n = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & -(\alpha^n-\beta^n) \\ \alpha^n-\beta^n & -(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}) \end{pmatrix}
$$

$$
3^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & -(\alpha^n-\beta^n) \\ \alpha^n-\beta^n & -(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & -(\alpha^n-\beta^n) \\ \alpha^n-\beta^n & -(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}) \end{pmatrix}
$$

จากการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ $L_n = \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{3}}$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 6 จะได้ $\alpha\beta = 1,\ \alpha+\beta = 4,\ \alpha-\beta = 2\sqrt{3},\ \alpha\beta^{-1} = 7+4\sqrt{3},\ \alpha^{-1}\beta = 7-4\sqrt{3}$

ทฤษฎีบท 7 ให้ Q_L เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$
per(Q_L^n) = -\frac{1}{3}(M_{2n}-4)
$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และบทนิยาม 1 จะได้

$$
\begin{aligned}
per(Q_L^n) &= per \begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= -L_{n+1}L_{n-1} - {L_n}^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} per(Q_L^n) &= -\frac{1}{12}\left[2\alpha^{2n} + 2\beta^{2n} - (\alpha\beta)^n(\alpha\beta^{-1} + \alpha^{-1}\beta) - 2\right] \\ &= -\frac{1}{3}\left[\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} - 4\right] \\ &= -\frac{1}{3}(M_{2n} - 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $per(Q_L^n) = -\frac{1}{3}(M_{2n} - 4)$

ในหัวข้อต่อไปนี้จะหาเอกลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส โดยวิธีเมทริกซ์ ซึ่งจะแยกพิจารณาเป็นกรณีต่าง ๆ

เอกลักษณ์บางประการของลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส โดยวิธีเมทริกซ์

บทตั้ง 8 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้

1) $M_n = 2L_n - L_{n-1}$ (5)

2) $3L_n = 2M_n - M_{n-1}$ (6)

พิสูจน์ 1) สังเกตว่า $2L_1 - L_0 = 2(1) - 0 = 2 = M_1$ ดังนั้น ทฤษฎีบทนี้ เป็นจริงสำหรับ $n = 1$

ให้ i เป็นจำนวนเต็มบวก สมมติให้ $M_i = 2L_i - L_{i-1}$ เป็นจริง สำหรับ $1 \le i \le k$

พิจารณา
$$\begin{aligned} M_{k+1} &= 4M_k - M_{k-1} \\ &= 4(2L_k - L_{k-1}) - (2L_{k-1} - L_{k-2}) \\ &= 2L_{k+1} - L_k \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยหลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $M_n = 2L_n - L_{n-1}$ สำหรับทุก $n \ge 1$

2) จากสมการ (5) จะได้ $2M_n = 4L_n - 2L_{n-1}$ และ $M_{n-1} = 2L_{n-1} - L_{n-2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2M_n - M_{n-1} &= 4L_n - 2L_{n-1} - 2L_{n-1} + L_{n-2} \\ &= 4L_n - L_n \\ &= 3L_n \end{aligned}$$

นั่นคือ $2M_n - M_{n-1} = 3L_n$

ทฤษฎีบท 9 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้

$$Q_M \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n+1} \\ M_n \end{pmatrix}$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากสมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} Q_M \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7L_n - 2L_{n-1} \\ 2L_n - L_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

จากสมการ (1) และสมการ (5) จะได้ $M_{n+1} = 7L_n - 2L_{n-1}$

ดังนั้น $Q_M \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n+1} \\ M_n \end{pmatrix}$

บทแทรก 10 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้

$$2M_n = L_{n+1} - L_{n-1}$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากสมการ (7) จะได้

$$2M_n = 4L_n - 2L_{n-1} = L_{n+1} - L_{n-1}$$

ดังนั้น $2M_n = L_{n+1} - L_{n-1}$

ทฤษฎีบท 11 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้

$$Q_M \begin{pmatrix} M_n \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix}$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากสมการ (4) จะได้

$$Q_M \begin{pmatrix} M_n \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_n \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7M_n - 2M_{n-1} \\ 2M_n - M_{n-1} \end{pmatrix}$$

จากสมการ (2) และสมการ (6) จะได้ $3L_{n+1} = 7M_n - 2M_{n-1}$

ดังนั้น $Q_M \begin{pmatrix} M_n \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix}$

บทแทรก 12 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้

$$6L_n = M_{n+1} - M_{n-1}$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากสมการ (2) และ (8) จะได้ $6L_n = M_{n+1} - M_{n-1}$

ทฤษฎีบท 13 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้

$$\det(Q_M^n) = (-3)^n$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\det\,(Q_M^n) = (\det\,Q_M)^n \;=\; (-3)^n$$

ดังนั้น $\det(Q_M^n) = (-3)^n$

ทฤษฎีบท 14 ให้ Q_M เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ n เป็นจำนวนคี่ จะได้

$$per(Q_M^n) = -3^{n-1}(M_{2n} + 4)$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนคี่ และทฤษฎีบท 5 จะได้

$$\begin{aligned} per(Q_M^n) &= per\left(3^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} M_{n+1} & -M_n \\ M_n & -M_{n-1}\end{pmatrix}\right) \\ &= 3^{n-1}(-M_{n+1}M_{n-1} - {M_n}^2) \\ &= -3^{n-1}\left[\left(\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{2}\right)+\left(\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2\right] \\ &= -3^{n-1}\left[\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}+4\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $per(Q_M^n) = -3^{n-1}(M_{2n}+4)$

ทฤษฎีบท 15 ให้ Q_M เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ n เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$per(Q_M^n) = -3^{n-1}(M_{2n}-4)$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนคู่ และจากทฤษฎีบท 5 จะได้

$$\begin{aligned} per(Q_M^n) &= per\left(3^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ L_n & -L_{n-1}\end{pmatrix}\right) \\ &= -3^n(L_{n+1}L_{n-1} + {L_n}^2) \\ &= -3^n\left[\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{2\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{3}}\right)^2\right] \\ &= -\frac{3^n}{12}\left[2\alpha^{2n}+2\beta^{2n}-16\right] \\ &= -3^{n-1}(M_{2n}-4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $per(Q_M^n) = -3^{n-1}(M_{2n}-4)$

อภิปรายผลการวิจัย

ในงานวิจัยครั้งผู้วิจัยได้นำความรู้ทางพีชคณิตเชิงเส้นเกี่ยวกับเมทริกซ์ และค่าลักษณะเฉพาะ นำมาสร้างสูตรบิเนต และเอกลักษณ์ต่าง ๆ ของลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส โดยใช้เมทริกซ์ $Q_L = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ และ $Q_M = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ตรงกับ [7] อีกทั้งได้คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์และเพอร์มาแนนต์ของเมทริกซ์ Q_L^n และ Q_M^n และสามารถสร้างเอกลักษณ์ต่าง ๆ ของลำดับเหล่านี้ได้อีกมาก

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ซึ่งนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_{n+1} = 4L_n - L_{n-1}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $L_0 = 0, L_1 = 1$

และ $M_{n+1} = 4M_n - M_{n-1}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $M_0 = 1, M_1 = 2$ และได้นิยามเมทริกซ์ $Q_L = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ และ $Q_M = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ จากลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส ตามลำดับ และใช้เมทริกซ์ดังกล่าวหาสูตรบิเนตและได้เอกลักษณ์ต่าง ๆ ของลำดับคล้ายสมดุลที่อยู่ในรูปผลคูณของเมทริกซ์ Q_L เมทริกซ์ยกกำลัง Q_L^n ดีเทอร์มิแนนต์ ของ Q_L^n เพอร์มาแนนต์ของเมทริกซ์ Q_L^n รวมไปถึงเอกลักษณ์ที่อยู่ในรูปผลคูณของเมทริกซ์ Q_M เมทริกซ์ยกกำลัง Q_M^n ดีเทอร์มิแนนต์ของ Q_M^n เพอร์มาแนนต์ของเมทริกซ์ Q_M^n

เอกสารอ้างอิง

[1] Behera, A., & Panda, G. K. (1999). On the square roots of triangular numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 37(2), 98-105.

[2] Panda, G. K. (2009). Some fascinating properties of balancing numbers (pp.185-189). In *Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications*. Cong. Numerantium.

[3] Ray, P. K. (2012). Certain matrices associated with balancing and Lucas-balancing numbers. *Matematika*, 28(1), 15-22.

[4] Ray, P. K. (2014). On the properties of Lucas-balancing numbers by matrix method. *Applied Mathematical Sciences*, 3(1), 1-6.

[5] Panda, G. K., & Panda, A. K. (2014). Balancing-like sequences associated with integral standard deviations of consecutive natural numbers. *Applied Mathematical Sciences*, 52(5), 187-192.

[6] Minc, H. (1978). *Permanents Encyclopaedia of Mathematics and its Applications*, vol 6. London: Addison-Wesley Publishing Company.

[7] สานิตย์ ฤทธิเดช, ซามียะห์ แวกะจิ, และ ลัดดาวัลย์ หมัดสมัน. (2560). บางเอกลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุลและลำดับคล้ายสมดุล-ลูคัส โดยใช้สูตรไบเนท (หน้า 310-315). ใน *รายงานการนำเสนอผลงานวิจัยระดับชาติ ด้านวิทยาศาสตร์ และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครศรีธรรมราช* ครั้งที่ 2. มหาวิทยาลัยราชภัฏนครศรีธรรมราช.