



รายงานสืบเนื่อง
งานประชุมวิชาการระดับชาติ
ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7

วันที่ 10-11 มีนาคม พ.ศ. 2565
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

รายงานสืบเนื่องจากงานประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565

(The Proceedings of the 7th National Science and Technology Conference : NSCIC 2022)

จัดพิมพ์โดย คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

พิมพ์ครั้งที่ 1

ปีที่พิมพ์ 2565

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ 978-974-306-573-6

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication data

มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

รายงานสืบเนื่องจากงานประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 = The proceedings of
the 7th national science and technology conference : NSCIC 2022.--

สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี, 2565.

1638 หน้า.

1. วิทยาศาสตร์กับเทคโนโลยี -- การประชุม. I. ชื่อเรื่อง.

600

ISBN 978-974-306-573-6

สงวนลิขสิทธิ์โดย

มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

272 หมู่ที่ 9 ถนน สุราษฎร์-นาสาร ตำบลขุนทะเล อำเภอเมือง

จังหวัดสุราษฎร์ธานี 84100

โทรศัพท์ 0-7791-3333

เว็บไซต์ <https://nscic.sru.ac.th/>

จัดพิมพ์แบบ อิเล็กทรอนิกส์

บทความฉบับเต็ม

การประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565
(The Proceedings of the 7th National Science and Technology Conference:
NSCIC 2022)

ผู้จัดทำ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ที่ปรึกษา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วัฒนา รัตนพรหม
รักษาราชการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

กองบรรณาธิการ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพงศ์ เครือหงส์	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	ประธานกรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ขวัญกมล ขุนพิทักษ์	มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชวัลรัตน์ ศรีนวลปาน	มหาวิทยาลัยราชภัฏนครศรีธรรมราช	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลลิตา อุดยาศสน	มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์รังสรรค์ พลสมิคร	มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุธรรม ชุมพร้อมญาติ	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล ศรีวิชัยวิทยาเขตนครศรีธรรมราช (สไใหญ่)	กรรมการ
นายสุทัศน์ เหมทานนท์	วิทยาลัยพยาบาลบรมราชชนนี นครศรีธรรมราช	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์กันณรัตน์ หนูชุม	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	กรรมการและเลขานุการ
อาจารย์ ดร.มิตี เจียรพันธุ์	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
อาจารย์ศักดิ์ชัย กรรमारากร	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ

คณะกรรมการดำเนินงาน

ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอกมหาวิทยาลัย จำนวน 62 คน
ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายในมหาวิทยาลัย จำนวน 87 คน
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ฝ่ายดำเนินงาน

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี
272 หมู่ 9 ต.ขุนทะเล อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี 84100
โทรศัพท์ 077-913-366
อีเมล sci@sru.ac.th
Facebook Page @sci.sru.ac.th

สารจากคณบดี

การจัดการประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 (The 7th National Science and Technology Conference: NSCIC 2022) เป็นโครงการที่จัดต่อเนื่องทุกปีซึ่งปีนี้ถึงปีที่ 7 เพื่อเผยแพร่องค์ความรู้ที่เกิดจากงานวิจัยของนักศึกษาระดับปริญญาตรีของสถาบันเครือข่ายทั้ง 7 สถาบัน โดยที่ประชุมเครือข่ายมีมติมอบหมายให้คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี เป็นเจ้าภาพในการจัดประชุมวิชาการระหว่างวันที่ 10 – 11 มีนาคม 2565 รูปแบบออนไลน์ โดยมีหน้าที่เป็นผู้ประสานงานหลักในการดำเนินงานตลอดจนการจัดทำรายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการเพื่อเผยแพร่แก่ผู้ที่สนใจซึ่งจะเป็นประโยชน์ทางวิชาการด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต่อไป

การจัดงานประชุมวิชาการในครั้งนี้คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี ได้รับความร่วมมือจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกและภายในมหาวิทยาลัยในการตรวจอ่านประเมินคุณภาพของผลงานตามลักษณะของ Peer Review ดังนั้นผลงานที่ผ่านการประเมินและได้รับการตีพิมพ์ในรายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการฉบับนี้จึงเป็นงานวิจัยที่มีคุณภาพ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี หวังเป็นอย่างยิ่งว่าการจัดการประชุมวิชาการในครั้งนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เข้าร่วมและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกท่านเพื่อจะได้รับความรู้ไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อตนเองและประเทศชาติต่อไป

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี ขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์และบุคลากรทุกท่านที่มีส่วนร่วมในการจัดงานในครั้งนี้เป็นอย่างดี



(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพงศ์ เครือหงส์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำนำ

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 (The Proceedings of the 7th National Science and Technology Conference : NSCIC 2022) นี้ได้รวบรวมบทความวิจัยทั้งการนำเสนอภาคบรรยายและโปสเตอร์ที่นำเสนอในงานประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 (The 7th National Science and Technology Conference : NSCIC 2022) ระหว่างวันที่ 10-11 มีนาคม พ.ศ. 2565 รูปแบบออนไลน์ ซึ่งทุกบทความผ่านการพิจารณาจากกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิที่มีความเชี่ยวชาญในแต่ละสาขาวิชาของมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานีและหน่วยงานภายนอกมหาวิทยาลัย รวมทั้งสิ้น 179 บทความ จาก 6 กลุ่ม ดังนี้

การนำเสนอผลงานในการประชุมวิชาการครั้งนี้มีทั้งภาคบรรยายและภาคโปสเตอร์ ซึ่งคณะผู้จัดทำได้รวบรวมผลงานที่นำเสนอทั้งหมดเป็นบทความวิจัยฉบับเต็มไว้ในรายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565

แบบบรรยาย 134 บทความ ประกอบด้วย

กลุ่มที่ 1 ด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิทยาศาสตร์ประยุกต์	จำนวน	43	บทความ
กลุ่มที่ 2 ด้านเกษตรศาสตร์ ประมง	จำนวน	6	บทความ
กลุ่มที่ 3 ด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ เทคโนโลยีสารสนเทศ และมัลติมีเดีย	จำนวน	36	บทความ
กลุ่มที่ 4 ด้านสาธารณสุขศาสตร์ วิทยาศาสตร์สุขภาพ	จำนวน	19	บทความ
กลุ่มที่ 5 ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี	จำนวน	20	บทความ
กลุ่มที่ 6 ด้านนวัตกรรมสิ่งประดิษฐ์ เทคโนโลยี และงานสร้างสรรค์	จำนวน	10	บทความ

แบบโปสเตอร์ 45 บทความ ประกอบด้วย

กลุ่มที่ 1 ด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิทยาศาสตร์ประยุกต์	จำนวน	18	บทความ
กลุ่มที่ 2 ด้านเกษตรศาสตร์ ประมง	จำนวน	7	บทความ
กลุ่มที่ 3 ด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ เทคโนโลยีสารสนเทศ และมัลติมีเดีย	จำนวน	6	บทความ
กลุ่มที่ 4 ด้านสาธารณสุขศาสตร์ วิทยาศาสตร์สุขภาพ	จำนวน	10	บทความ
กลุ่มที่ 5 ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี	จำนวน	4	บทความ

คณะกรรมการดำเนินงานจัดประชุมวิชาการนำเสนอผลงานวิจัย ขอขอบคุณผู้บริหารทั้ง 7 สถาบัน ผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่าน ที่ส่งเสริมและสนับสนุนให้การจัดงานครั้งนี้ประสบความสำเร็จเป็นอย่างดี ขอขอบคุณคณะกรรมการดำเนินงานทุกฝ่ายที่ให้ความร่วมมือและตั้งใจปฏิบัติงานจนประสบความสำเร็จลุล่วงไปด้วยดีรวมถึงขอขอบคุณผู้ส่งผลงานเข้าร่วมนำเสนอหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผู้เข้าร่วมทุกท่านจะได้รับประโยชน์จากการประชุมวิชาการในครั้งนี้

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

กำหนดการ
งานประชุมวิชาการระดับชาติ ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7
(The 7th National Science and Technology Conference (NSCIC 2022))

วัน	เวลา	Room I	Room II	Room III	Room IV	Room V	Room VI
10 มีนาคม 2565	08:30 - 09:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน				
	09:00 - 09:30	พิธีเปิด โดย ศ.ดร.วัฒนา รัตนพรหม	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 1 11A1 - 11A8				
	09:30 - 10:30	บรรยายพิเศษโดย ดร.นรา พงษ์พานิช "ทิศทางงานขับเคลื่อนชุมชนท้องถิ่น และสังคมภาคใต้ ด้วยงานวิจัย งานสร้างสรรค์ และนวัตกรรมด้านวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี"	Session Chair: ดร.อุไรรัตน์ รัตนวิจิตร รศ.ดร.สุกัญญา วงศ์ระฆัง				
	11:00 - 12:00	บรรยายพิเศษโดย ดร.สโรจน์ สุธีธรสถกุล "งานวิจัยด้านความหลากหลายทางชีวภาพสู่ การพัฒนาเศรษฐกิจชีวภาพ"					
	12:00 - 13:00			พักรับประทานอาหารกลางวัน			
	12:30 - 13:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน
	13:00 - 16:30	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 2 11B1 - 11B8 Session Chair: ดร.พรทิพย์ วิมลทรง ผศ.จิรนนท์ กล่อมมรา แก้วรักษา	นำเสนอ ด้านสารสนเทศศาสตร์ / ประมง วิทยาศาสตร์สุขภาพ 1 21B1 - 21B10 Session Chair: ผศ.ดร.ศุภณัฐ รักห้อง ผศ.ดร.สุวิทย์ เคนาเวล	นำเสนอ ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 1 22B1 - 22B13 Session Chair: ดร.ธัญญา ภาคคุณ ผศ.กัญจรัตน์ หนูชุม	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 5 31B1 - 31B8 Session Chair: ดร.สิทธิโชค ทรงสอาด ดร.อรรณกร คัดดา	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 7 32B1 - 32B10 Session Chair: ผศ.ดร.พราดา อินทร์ ดร.อัษฎพร ไชยเจริญ	
				สิ้นสุดการนำเสนอ			
11 มีนาคม 2565	08:30 - 09:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน
	09:00 - 12:00	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 3 11C1 - 11C7 Session Chair: ดร.นิภาภรณ์ มีพันธุ์ ผศ.ดร.อนงกฎ ไพบูลย์	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์สุขภาพ 2 21C1 - 21C9 Session Chair: ดร.คณิต หนูพล ผศ.ดร.ศุภณัฐ พงศ์เจริญ	นำเสนอ ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2 22C1 - 22C11 Session Chair: ดร.ศราวุธ มากจิต ดร.กฤตภาส สงครินทร์	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 6 31C1 - 31C8 Session Chair: ผศ.กัญจรัตน์ หนูชุม ผศ.ดร.ขนิษฐา กรัณทิการกาญจน์	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 4 32C1 - 32C8 Session Chair: ดร.กฤษณ์ ศรีพร ผศ.สุกิจ เอี่ยมสะอาด	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 5 32D1 - 32D9 Session Chair: ผศ.สุกิจ เอี่ยมสะอาด ผศ.ภาณุอนา ฝ่อทอง
	12:00 - 13:00			พักรับประทานอาหารกลางวัน			
	12:30 - 13:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน
	13:00 - 16:30	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 4 11D1 - 11D12 Session Chair: ผศ.ดร.พัชร์ พงษ์พุ่ม ผศ.เสาวนีย์ ขอบบุญ	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์สุขภาพ 3 21D1 - 21D10 Session Chair: ดร.อมรพันธ์ ประยูรวงศ์ ผศ.ดร.ศุภณัฐ พงษ์พา	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ / วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 3 22D1 - 22D11 Session Chair: ผศ.ปริญญา น้อยอนไพร ผศ.ศิริวัฒน์ เสงี่ยมโย	นำเสนอ ด้านวิศวกรรมสิ่งประดิษฐ์ เทคโนโลยี และงานสร้างสรรค์ 31D1 - 31D10 Session Chair: ดร.พัชร์ ราชเริ่ม ดร.ณัฐธิดา ศรีพญา	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 5 32D1 - 32D9 Session Chair: ผศ.สุกิจ เอี่ยมสะอาด ผศ.ภาณุอนา ฝ่อทอง	
				สิ้นสุดการนำเสนอ			

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 4			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
3	PSB64190	การพัฒนาเจลล้างมือที่มีส่วนผสมของสารสกัดจากเปลือกผลไม้ในการต้านการเจริญของเชื้อแบคทีเรียก่อโรคบางชนิด	191
4	PSB64215	การยับยั้งเชื้อราโดยใช้สารสกัดหยาบจากใบและเปลือกสับปะรด	202
5	PSB64231	ฤทธิ์ต้านทานแบคทีเรียของสารสกัดหยาบจากหญ้าตีนกา (<i>Eleusine indica</i> (L.) Gaertn.)	210
6	PSB64270	ผลของปัจจัยสิ่งแวดล้อมบางประการต่อแมลงน้ำในลำธารน้ำตกมโนราห์ จังหวัดพัทลุง	218
7	PSB64361	ผลของ 2, 4-D ต่อการชักนำแคลลัสในเมล็ดข้าวเหนียวพัทลุง (<i>Oryza sativa</i> L.)	224
8	PSB64387	การวิเคราะห์ฤทธิ์ต้านอนุมูลอิสระในสารสกัดข้าวสาลีพันธุ์ กข 43 ปากอ และกข 43 ระโนด	230
9	PSB64399	ฤทธิ์ต้านอนุมูลอิสระและฤทธิ์ต้านแบคทีเรียของสารสกัดหยาบจากใบทองพันชั่งต่อเชื้อแบคทีเรียก่อโรคผิวหนัง	236
10	PSB64403	การแยกและจำแนกชนิดราเอนโดไฟต์จากต้นยี่โถปิ้งและต้นโทะ ที่ขึ้นในเหมืองแร่เหล็กเก่า อ.นบพิตำ จ. นครศรีธรรมราช	246
11	PSB64413	ข้อมูลสวนโปรตีนของรกช้างไทยที่ถูกย่อยด้วยเปปซิน	255
12	PSB64422	ฤทธิ์ต้านแบคทีเรียก่อกลิ่นของน้ำมันหอมระเหยจากดอกไม้และการประยุกต์ใช้	261

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 5			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OSM64196	จำนวนคล้ายสมมูลอันดับสามทั่วไป	269
2	OSM64199	การเปรียบเทียบเทคนิคการวิเคราะห์หอนุกรมเวลาสำหรับการพยากรณ์ผู้เข้าใช้บริการในสำนักงานที่ดิน	277
3	OSM64200	การเปรียบเทียบเทคนิคการวิเคราะห์หอนุกรมเวลาสำหรับการพยากรณ์ยอดขายสินค้า	287
4	OSM64204	การเปรียบเทียบเทคนิคการวิเคราะห์หอนุกรมเวลาสำหรับการพยากรณ์ค่าโฆษณาทุกเกิ้ล	296
5	OSM64210	สมการไดโอแฟนไทน์ $4^x - p^y = dz^2$ เมื่อ $p \equiv 2,3 \pmod{4}$ เป็นจำนวนเฉพาะ, $d = 4^k - 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ	305
6	OSM64224	ปัจจัยที่มีความสัมพันธ์ต่อผลิตภัณฑ์มวลรวมตามมูลค่าที่แท้จริงของจังหวัดสุราษฎร์ธานี	310
7	OSM64226	ปัจจัยด้านภูมิอากาศที่มีอิทธิพลต่อจำนวนผู้ป่วยโรคไวรัสโคโรนา 2019 (โควิด-19) ในภาคใต้ของประเทศไทย	317
8	OSM64232	สมบัติบางประการของนัยทั่วไปใหม่ของลำดับคล้าย (p,q) - ฟิโบนาคี	325

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 6			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OSM64233	เอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p,q) -ลูคัสทั่วไป	334
2	OSM64369	ปัจจัยที่มีผลกระทบต่อปริมาณผลผลิตยางพาราแผ่นดิบคุณภาพ 3 ในจังหวัดสุราษฎร์ธานี	342
3	OSM64374	วิธีการใหม่สำหรับการแก้สมการไม่เชิงเส้นโดยพหุนามเทย์เลอร์กำลังสอง	350
4	OSM64379	Comparison of Edge Finding Performance with Gradient and Laplacian Techniques	355
5	OSM64380	Comparison of Edge Finding Performance with Canny and Sobel Techniques	362
6	OSM64386	ตัวแบบคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคโควิด-19 โดยการฉีดวัคซีนเพื่อให้เกิดภูมิคุ้มกันหมู่ : กรณีศึกษาของประเทศไทย	369
7	OSM64388	แบบจำลองคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรควันโรคที่มีผลมาจากคนติดเชื้อในระยะแฝงที่ได้รับการวินิจฉัยและได้รับการรักษา และการติดเชื้อซ้ำ	379
8	OSM64421	การพยากรณ์ผลิตภัณฑ์มวลรวมของจังหวัดสุราษฎร์ธานี	389

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 7			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OSF64230	การพัฒนาเครื่องเติมน้ำส้มสายชูหมักผสมพืชท้องถิ่นในจังหวัดยะลา	399
2	OSF64246	การพัฒนาผลิตภัณฑ์เยลลี่พร้อมดื่มจากน้ำตาลโตนดสดเสริมอินูลิน	409
3	OSF64247	การพัฒนาโน้ตแค้กทดแทนแป้งสาลีด้วยแป้งข้าวกล้องหอมมะลิและใช้สารทดแทนไขมันจากสาหร่ายเกลายอง	416
4	OSF64337	การใช้แป้งเมล็ดขนุนเป็นสารให้ความคงตัวในไอศกรีมกะทิเสริมบรอกโคลีผง	426



คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

เอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป

Identities on the New Generalized of (p, q) - Lucas Sequences

ซูฮัยดาห์ เปาะจิ¹, นิสสุไรดา ปูเตะ² และ ศรีณยา เสงส์สวัสดิ์^{3*}

Suhaidah Pohchi¹, Nissuraida Puteh² and Saranya Hangsawat^{3*}

¹ นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อีเมล: 614254010@parichat.skru.ac.th

² นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อีเมล: 614254038@parichat.skru.ac.th

³ อาจารย์ สังกัดหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อีเมล: saranya.nu@skru.ac.th

* Corresponding author email: saranya.nu@skru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป ซึ่งนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_{p,q,0} = 2p$, $L_{p,q,1} = p^2$ สำหรับจำนวนเต็ม $p \geq 1, q \geq 1$ นอกจากนี้ได้ศึกษาสูตรบินेट ได้เอกลักษณ์บางประการของลำดับรวมทั้งสูตรผลรวมของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป โดยใช้สูตรบินेटที่สร้างขึ้น

คำสำคัญ: ลำดับ (p, q) - ฟิโบนัคซีทั่วไป ลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป สูตรบินेट

Abstract

In this paper, we introduced Identities on the New Generalized of (p, q) - Lucas Sequences which are defined by the recurrence relations $L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2}$ for positive integer $n \geq 2$ with initial conditions $L_{p,q,0} = 2p$, $L_{p,q,1} = p^2$ for integer $p \geq 1, q \geq 1$. We study the Binet's formulas, We have identities and sums of New Generalized of (p, q) - Lucas Sequences, by using Binet's formulas.

Keywords: Generalized (p, q) - Fibonacci sequence, Generalized (p, q) - Lucas sequence, Binet's formula.

1. บทนำ

ลำดับฟีโบนัคซี และลำดับลูคัสเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในทางคณิตศาสตร์ ลำดับดังกล่าวได้รับความสนใจจากนักวิจัยเป็นจำนวนมาก

มีผลงานมากมายที่จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาลำดับใหม่ที่เกี่ยวข้องรวมทั้งพิสูจน์เอกลักษณ์บางประการของลำดับ (p, q) - ฟีโบนัคซี และลำดับ (p, q) - ลูคัส เช่น (Suvarnamani A., 2016) ได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับทั่วไปซึ่งเป็นลำดับ (p, q) - ลูคัส โดยใช้สูตรบินेट เพื่อแสดงสมบัติบางประการของจำนวน (p, q) - ลูคัส และเอกลักษณ์ทั่วไปของจำนวน (p, q) - ลูคัส ต่อมา (Svarnamani, A.; Tatong, M., 2017) ได้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติบางอย่างของจำนวน (p, q) - ฟีโบนัคซี และจำนวน (p, q) - ลูคัส โดยใช้สูตรบินेट เพื่อแสดงสมบัติบางอย่างของจำนวน (p, q) - ฟีโบนัคซี และจำนวน (p, q) - ลูคัส และสมบัติทั่วไปบางประการเกี่ยวกับผลคูณของจำนวน (p, q) - ฟีโบนัคซี และจำนวน (p, q) - ลูคัส และ (กานต์พิชชา แซ่ตั้ง และคณะ., 2561) ได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับทั่วไปของลำดับฟีโบนัคซี และลำดับลูคัส โดยการเปลี่ยนความสัมพันธ์เวียนเกิด และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น พร้อมทั้งศึกษาฟังก์ชันก่อกำเนิด สูตรบินेट เอกลักษณ์ และสมบัติบางประการของลำดับทั่วไป นอกจากนี้ (Suvarnamani A., 2018) และ (Tasyudu, Y., 2019) ได้ศึกษาลำดับคล้าย (p, q) - ฟีโบนัคซีทั่วไป ที่เกี่ยวข้องกับลำดับ (p, q) - ฟีโบนัคซี และลำดับ (p, q) - ลูคัส โดยใช้สูตรบินेट แล้วจะได้เอกลักษณ์พื้นฐาน และสูตรผลรวมของ n พจน์แรกที่เป็นจำนวนคี่ และจำนวนคู่

ของลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนัคชีทั่วไป นอกจากนี้ยังมีการพิสูจน์ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับเหล่านี้ (Thongkam, B.; Butsuwan, K.; Bunya, P., 2020) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลคูณ และสมบัติการคูณที่เกี่ยวข้องกับจำนวนคล้าย (p, q) - พิโบนัคชีทั่วไป และจำนวน (p, q) - ลูคัสทั่วไป โดยใช้สูตรบินเต (คอรี่เยา และคณะ., 2564) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลรวมของลำดับพิโบนัคชี และลำดับลูคัสทั่วไป โดยใช้สูตรบินเตในการหาผลรวม

ในการทำวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษา เอกลักษณะสำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป โดยกำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับ (p, q) - พิโบนัคชีทั่วไป คือ $F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_{p,q,0} = 0, F_{p,q,1} = p$ สำหรับจำนวนเต็ม $p \geq 1, q \geq 1$ และลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป ที่มีความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_{p,q,0} = 2p, L_{p,q,1} = p^2$ สำหรับจำนวนเต็ม $p \geq 1, q \geq 1$ โดยจะศึกษาสูตรบินเต และใช้สูตรบินเตในการพิสูจน์เอกลักษณ์ และหาผลรวมของลำดับดังกล่าว

2. วิธีดำเนินการวิจัย

ในส่วนนี้จะนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับ (p, q) - พิโบนัคชีทั่วไป และลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป พร้อมทั้งหาสูตรบินเต และสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป

บทนิยาม 1 สำหรับ $p \geq 1$ และ $q \geq 1$ กำหนดให้ลำดับ (p, q) - พิโบนัคชีทั่วไป เขียนแทนด้วย $\{F_{p,q,n}\}_{n=0}^{\infty}$ และลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป เขียนแทนด้วย $\{L_{p,q,n}\}_{n=0}^{\infty}$ กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2} \text{ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n \geq 2 \quad (1)$$

และ

$$L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2} \text{ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n \geq 2 \quad (2)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_{p,q,0} = 0, F_{p,q,1} = p$ และ $L_{p,q,0} = 2p, L_{p,q,1} = p^2$ สำหรับจำนวนเต็ม $p \geq 1, q \geq 1$

สำหรับบางค่า $n \geq 0$ ซึ่ง ลำดับ (p, q) - พิโบนัคชีทั่วไป และ ลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป มีค่าดังนี้

$$\{F_{p,q,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, p, p^2, p^3 + pq, p^4 + 2p^2q, p^5 + 3p^3q + pq^2, p^6 + 4p^4q + 3p^2q^2, \dots\}$$

และ

$$\{L_{p,q,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{2p, p^2, p^3 + 2pq, p^4 + 3p^2q, p^5 + 4p^3q + 2pq^2, p^6 + 5p^4q + 5p^2q^2, \dots\}$$

สำหรับ $p = q = 1$ จะได้ ลำดับ (p, q) - พิโบนัคชีทั่วไป และลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป มีค่าดังนี้

$$\{F_{1,1,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$$

และ

$$\{L_{1,1,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots\}$$

สมการลักษณะเฉพาะของสมการ (2) คือ

$$r^2 - pr - q = 0 \quad (*)$$

ดังนั้น รากของสมการลักษณะเฉพาะ คือ $r_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ และ $r_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ สำหรับ $r_1 > r_2$

ซึ่งจะได้ $r_1 + r_2 = p$, $r_1 r_2 = -q$, $r_1 - r_2 = \sqrt{p^2 + 4q}$ และ $r_2^2 = -q$

สูตรบินต์ (Binet's formula)

สูตรบินต์ของลำดับ (p, q) - ฟีโบนัชชีทั่วไป $\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ และลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป $\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ คือ

$$F_{p,q,n} = p \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right) \quad (3)$$

และ

$$L_{p,q,n} = p(r_1^n + r_2^n) \quad (4)$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating functions)

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป $\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ ฟังก์ชันก่อกำเนิด $g(x)$ เป็นอนุกรมกำลัง

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5)$$

ซึ่ง ให้สัมประสิทธิ์ของลำดับ $\{a_0, a_1, \dots\}$ ให้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็นนิพจน์สำหรับพจน์ที่ n ในอนุกรมที่สอดคล้องกัน

ทฤษฎีบท 1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป จะได้

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{p,q,n} x^n = \frac{2p - p^2 x}{1 - px - qx^2}$$

พิสูจน์ ลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป สามารถพิจารณาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลังที่สอดคล้องกับฟังก์ชันก่อกำเนิดในสมการ (5) สมมติว่า ลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป เป็นสัมประสิทธิ์ของอนุกรมไม่จำกัดเขตที่มีจุดกำเนิด และพิจารณาฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $g(x)$ ดังนั้น

$$\text{กำหนดให้ } g(x) = L_{p,q,0} + L_{p,q,1}x + L_{p,q,2}x^2 + \dots + L_{p,q,n}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} L_{p,q,n}x^n \quad (6)$$

$$pg(x)x = pL_{p,q,0}x + pL_{p,q,1}x^2 + pL_{p,q,2}x^3 + \dots + pL_{p,q,n-1}x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} pL_{p,q,n-1}x^n \quad (7)$$

$$\text{และ } qg(x)x^2 = qL_{p,q,0}x^2 + qL_{p,q,1}x^3 + qL_{p,q,2}x^4 + \dots + qL_{p,q,n-2}x^n + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} qL_{p,q,n-2}x^n \quad (8)$$

ผลรวมของสมการ (6), (7) และ (8) และใช้นิยามของความสัมพันธ์ (2) จะได้

$$\begin{aligned} g(x)(1 - px - qx^2) &= L_{p,q,0} + L_{p,q,1}x + L_{p,q,2}x^2 - pL_{p,q,0}x - pL_{p,q,1}x^2 - pL_{p,q,2}x^3 - qL_{p,q,0}x^2 \\ &\quad - qL_{p,q,1}x^3 - qL_{p,q,2}x^4 + \dots + L_{p,q,n}x^n - pL_{p,q,n-1}x^n - qL_{p,q,n-2}x^n + \dots \\ &= L_{p,q,0} - pL_{p,q,0}x + L_{p,q,1}x + \sum_{n=2}^{\infty} (L_{p,q,n} - pL_{p,q,n-1} - qL_{p,q,n-2})x^n \end{aligned} \quad (9)$$

เมื่อ $L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $L_{p,q,0} = 2p$ และ $L_{p,q,1} = p^2$ จากสมการ (2) จะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป ดังนี้

$$g(x)(1 - px - qx^2) = 2p - p(2p)x + p^2x + \sum_{n=2}^{\infty} (pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2} - pL_{p,q,n-1} - qL_{p,q,n-2})x^n$$

$$g(x) = \frac{2p - p^2x}{1 - px - qx^2}$$

$$\text{ดังนั้น } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{p,q,n} x^n = \frac{2p - p^2x}{1 - px - qx^2}$$

3. ผลการวิจัย

เอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป

ทฤษฎีบท 2 (เอกลักษณ์ Cassini) ให้ p, q เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $n \geq 1$ จะได้

$$L_{p,q,n+1}L_{p,q,n-1} - L_{p,q,n}^2 = p^2(-q)^{n-1}(p^2 + 4q)$$

พิสูจน์ ให้ p, q และ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} L_{p,q,n+1}L_{p,q,n-1} - L_{p,q,n}^2 &= p(r_1^{n+1} + r_2^{n+1})p(r_1^{n-1} + r_2^{n-1}) - [p(r_1^n + r_2^n)]^2 \\ &= p^2(r_1^{n+1}r_2^{n-1} + r_1^{n-1}r_2^{n+1} - 2r_1^n r_2^n) \\ &= p^2(r_1^{n-1}r_2^{n-1})(r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \\ &= p^2(-q)^{n-1}(r_1 - r_2)^2 \\ &= p^2(-q)^{n-1}(p^2 + 4q) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } L_{p,q,n+1}L_{p,q,n-1} - L_{p,q,n}^2 = p^2(-q)^{n-1}(p^2 + 4q)$$

ทฤษฎีบท 3 ให้ p, q เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $n \geq 2$ จะได้

$$L_{p,q,n-2}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,n-1}L_{p,q,n} = p^3(-q)^{n-2}(p^2 + 4q)$$

พิสูจน์ ให้ p, q และ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} L_{p,q,n-2}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,n-1}L_{p,q,n} &= p(r_1^{n-2} + r_2^{n-2})p(r_1^{n+1} + r_2^{n+1}) - p(r_1^{n-1} + r_2^{n-1})p(r_1^n + r_2^n) \\ &= p^2(r_1^{n-2}r_2^{n+1} + r_1^{n+1}r_2^{n-2} - r_1^{n-1}r_2^n - r_1^n r_2^{n-1}) \\ &= p^2(r_1^{n-2}r_2^{n-2})(r_1^3 + r_2^3 - r_1^2r_2 - r_1r_2^2) \\ &= p^2(-q)^{n-2}(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)^2 \\ &= p^3(-q)^{n-2}(p^2 + 4q) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } L_{p,q,n-2}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,n-1}L_{p,q,n} = p^3(-q)^{n-2}(p^2 + 4q)$$

ทฤษฎีบท 4 (เอกลักษณ์ Catalan) ให้ p, q, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $m \geq n$ จะได้

$$L_{p,q,m-n}L_{p,q,m+n} - L_{p,q,m}^2 = p(-q)^{m-n} \left(\sqrt{p^2 + 4q} \right) F_{p,q,n}^2$$

พิสูจน์ ให้ p, q และ $m \geq n$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} L_{p,q,m-n}L_{p,q,m+n} - L_{p,q,m}^2 &= p(r_1^{m-n} + r_2^{m-n})p(r_1^{m+n} + r_2^{m+n}) - [p(r_1^m + r_2^m)]^2 \\ &= p^2(r_1^{m-n}r_2^{m+n} + r_1^{m+n}r_2^{m-n} - 2r_1^m r_2^m) \\ &= p^2(r_1^{m-n}r_2^{m-n})(r_1^{2n} - 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n}) \\ &= p^2(-q)^{m-n}(r_1^n - r_2^n)^2 \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2} \right) \\ &= p(-q)^{m-n} \left(\sqrt{p^2 + 4q} \right) F_{p,q,n}^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } L_{p,q,m-n}L_{p,q,m+n} - L_{p,q,m}^2 = p(-q)^{m-n} \left(\sqrt{p^2 + 4q} \right) F_{p,q,n}^2$$

ทฤษฎีบท 5 (เอกลักษณ์ Vajda) ให้ p, q, k, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$L_{p,q,m+n}L_{p,q,m+k} - L_{p,q,m}L_{p,q,m+n+k} = (-1)^{m+1} (q)^m (p^2 + 4q) F_{p,q,k} F_{p,q,n}$$

พิสูจน์ ให้ p, q, k, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} L_{p,q,m+n}L_{p,q,m+k} - L_{p,q,m}L_{p,q,m+n+k} &= p(r_1^{m+n} + r_2^{m+n})p(r_1^{m+k} + r_2^{m+k}) - p(r_1^m + r_2^m)p(r_1^{m+n+k} + r_2^{m+n+k}) \\ &= p^2(r_1^{m+n}r_2^{m+k} + r_1^{m+k}r_2^{m+n} - r_1^m r_2^{m+n+k} - r_1^{m+n+k}r_2^m) \\ &= p^2(r_1 r_2)^m [r_2^k(r_1^n - r_2^n) - r_1^k(r_1^n - r_2^n)] \\ &= (-1)(-q)^m (r_1 - r_2)^2 p \frac{(r_1^k - r_2^k)}{(r_1 - r_2)} p \frac{(r_1^n - r_2^n)}{(r_1 - r_2)} \\ &= (-1)^{m+1} (q)^m (p^2 + 4q) F_{p,q,k} F_{p,q,n} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } L_{p,q,m+n}L_{p,q,m+k} - L_{p,q,m}L_{p,q,m+n+k} = (-1)^{m+1} (q)^m (p^2 + 4q) F_{p,q,k} F_{p,q,n}$$

ทฤษฎีบท 6 ให้ p, q, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$L_{p,q,2m}L_{p,q,2n+1} + qL_{p,q,2m-1}L_{p,q,2n} = (p^3 + 4pq) F_{p,q,2m+2n}$$

พิสูจน์ ให้ p, q, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} L_{p,q,2m}L_{p,q,2n+1} + qL_{p,q,2m-1}L_{p,q,2n} &= p(r_1^{2m} + r_2^{2m})p(r_1^{2n+1} + r_2^{2n+1}) + q[p(r_1^{2m-1} + r_2^{2m-1})p(r_1^{2n} + r_2^{2n})] \\ &= p^2(r_1^{2m+2n+1} + r_1^{2m}r_2^{2n+1} + r_1^{2n+1}r_2^{2m} + r_2^{2m+2n+1}) \\ &\quad + (-r_1 r_2) [p^2(r_1^{2m+2n-1} + r_1^{2m-1}r_2^{2n} + r_1^{2n}r_2^{2m-1} + r_2^{2m+2n-1})] \\ &= p^2(r_1^{2m+2n+1} + r_2^{2m+2n+1} - r_1^{2m+2n}r_2 - r_1r_2^{2m+2n}) \\ &= p^2 \left[(r_1 - r_2)(r_1^{2m+2n} - r_2^{2m+2n}) \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2} \right) \right] \\ &= (p^3 + 4pq) F_{p,q,2m+2n} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } L_{p,q,2m}L_{p,q,2n+1} + qL_{p,q,2m-1}L_{p,q,2n} = (p^3 + 4pq) F_{p,q,2m+2n}$$

ทฤษฎีบท 7 (เอกลักษณ์ d'Ocagne) ให้ p, q, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกสำหรับ $m \geq n$ จะได้

$$L_{p,q,m}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,m+1}L_{p,q,n} = p^2(-1)^{n+1}(q)^n(p^2 + 4q)F_{p,q,m-n}$$

พิสูจน์ ให้ p, q และ $m \geq n$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} L_{p,q,m}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,m+1}L_{p,q,n} &= p(r_1^m + r_2^m)p(r_1^{n+1} + r_2^{n+1}) - p(r_1^{m+1} + r_2^{m+1})p(r_1^n + r_2^n) \\ &= p^2(r_1^m r_2^{n+1} + r_1^{n+1} r_2^m - r_1^{m+1} r_2^n - r_1^n r_2^{m+1}) \\ &= p^2(-1)(r_1^m r_2^n - r_1^n r_2^m)(r_1 - r_2) \\ &= p^2(-1)(r_1^n r_2^n)(r_1^{m-n} - r_2^{m-n})(r_1 - r_2) \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2} \right) \\ &= p^2(-1)^{n+1}(q)^n(p^2 + 4q)F_{p,q,m-n} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L_{p,q,m}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,m+1}L_{p,q,n} = p^2(-1)^{n+1}(q)^n(p^2 + 4q)F_{p,q,m-n}$

ทฤษฎีบท 8 ผลรวมของ n พจน์แรกของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป จะได้

$$\sum_{i=0}^n L_{p,q,i} = \frac{2p - p^2 - L_{p,q,n+1} - qL_{p,q,n}}{1 - p - q}$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n L_{p,q,i} &= \sum_{i=0}^n [p(r_1^i + r_2^i)] \\ &= p \left[\sum_{i=0}^n r_1^i + \sum_{i=0}^n r_2^i \right] \\ &= p \left(\frac{1 - r_1^{n+1}}{1 - r_1} + \frac{1 - r_2^{n+1}}{1 - r_2} \right) \\ &= p \left[\frac{(1 - r_1^{n+1})(1 - r_2) + (1 - r_2^{n+1})(1 - r_1)}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \right] \\ &= p \left[\frac{2 - (r_1 + r_2) - (r_1^{n+1} + r_2^{n+1}) + (r_1^n + r_2^n)(r_1 r_2)}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} \right] \\ &= \frac{2p - p^2 - L_{p,q,n+1} - qL_{p,q,n}}{1 - p - q} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{i=0}^n L_{p,q,i} = \frac{2p - p^2 - L_{p,q,n+1} - qL_{p,q,n}}{1 - p - q}$

ทฤษฎีบท 9 ผลรวมของ n พจน์แรกของจำนวนคี่ของเอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป จะได้

$$\sum_{i=0}^n L_{p,q,2i+1} = \frac{p^2(1+q) - L_{p,q,2n+3} + q^2 L_{p,q,2n+1}}{1-p^2+q^2}$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n L_{p,q,2i+1} &= \sum_{i=0}^n [p(r_1^{2i+1} + r_2^{2i+1})] \\ &= p \left[\sum_{i=0}^n r_1^{2(n+1)+1} + \sum_{i=0}^n r_2^{2(n+1)+1} \right] \\ &= p \left[r_1 \sum_{i=0}^n r_1^{2(n+1)} + r_2 \sum_{i=0}^n r_2^{2(n+1)} \right] \\ &= p \left[r_1 \left(\frac{1-r_1^{2(n+1)+1}}{1-r_1^2} \right) + r_2 \left(\frac{1-r_2^{2(n+1)+1}}{1-r_2^2} \right) \right] \\ &= p \left[\frac{(r_1 - r_1^{2n+3})(1-r_2^2) + (r_2 - r_2^{2n+3})(1-r_1^2)}{(1-r_2^2)(1-r_1^2)} \right] \\ &= \frac{p(r_1 + r_2)(1-r_1 r_2) - p(r_1^{2n+3} + r_2^{2n+3}) + p(r_1^{2n+1} + r_2^{2n+1})(r_1 r_2)^2}{1-p^2+q^2} \\ &= \frac{p^2(1+q) - L_{p,q,2n+3} + q^2 L_{p,q,2n+1}}{1-p^2+q^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{i=0}^n L_{p,q,2i+1} = \frac{p^2(1+q) - L_{p,q,2n+3} + q^2 L_{p,q,2n+1}}{1-p^2+q^2}$$

ทฤษฎีบท 10 ผลรวมของ n พจน์แรกของจำนวนคู่ของเอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูกศรทั่วไป จะได้

$$\sum_{i=0}^n L_{p,q,2i} = \frac{2p - p^3 - L_{p,q,2(n+1)} + q^2 L_{p,q,2n}}{1-p^2+q^2}$$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยใช้สมการ (4) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n L_{p,q,2i} &= \sum_{i=0}^n [p(r_1^{2i} + r_2^{2i})] \\ &= p \left[\sum_{i=0}^n r_1^{2(n+1)} + \sum_{i=0}^n r_2^{2(n+1)} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n [p(r_1^{2(n+1)} + r_2^{2(n+1)})] \\ &= p \left[\left(\frac{1-r_1^{2(n+1)+1}}{1-r_1^2} \right) + \left(\frac{1-r_2^{2(n+1)+1}}{1-r_2^2} \right) \right] \\ &= \frac{p}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} \left[(1-r_1^{2(n+1)+1})(1-r_2^2) + (1-r_2^{2(n+1)+1})(1-r_1^2) \right] \\ &= \frac{p}{(1-r_1^2-r_2^2+r_1^2 r_2^2)} \left[2 - (r_1^2 + r_2^2) - (r_1^{2(n+1)} + r_2^{2(n+1)}) + (r_1^{2n} + r_2^{2n})(r_1 r_2)^2 \right] \\ &= \frac{2p - p(r_1^2 + r_2^2) - p(r_1^{2(n+1)} + r_2^{2(n+1)}) + p(r_1^{2n} + r_2^{2n})(r_1 r_2)^2}{1 - (r_1^2 + r_2^2) + (r_1 r_2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2p - p^3 - L_{p,q,2(n+1)} + q^2 L_{p,q,2n}}{1 - p^2 + q^2}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{i=0}^n L_{p,q,2i} = \frac{2p - p^3 - L_{p,q,2(n+1)} + q^2 L_{p,q,2n}}{1 - p^2 + q^2}$$

4. อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป โดยนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2}$; $n \geq 2$ ซึ่งมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_{p,q,0} = 2p$, $L_{p,q,1} = p^2$ สำหรับจำนวนเต็ม $p \geq 1$, $q \geq 1$ พร้อมทั้งพิสูจน์เอกลักษณ์ Cassini, Catalan, Vajda, d'Ocagne และผลรวมของ n พจน์แรก รวมทั้งผลรวมของจำนวนคู่ และจำนวนคี่ โดยใช้สูตรบีเนตในการหาผลลัพธ์ดังกล่าวของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป

ในการทำวิจัยครั้งต่อไปสามารถขยายแนวคิดของเอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป โดยการเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นหรือความสัมพันธ์เวียนเกิด ศึกษาเอกลักษณ์เพิ่มเติมของลำดับ (p, q) - ฟิโบนัชชีทั่วไป กับลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป และผลรวมระหว่างลำดับ (p, q) - ฟิโบนัชชีทั่วไปกับลำดับ (p, q) - ลูคัสทั่วไป

5. เอกสารอ้างอิง

- กานต์พิชชา แซ่ตั้ง, ปารตี สุระกำแหง และ ศรีณยา เสงส์สวัสดิ์. (2561). เอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปของลำดับฟิโบนัชชี และลำดับลูคัส. *วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา*, 23(3), 1705-1716.
- คอรี่เยา เหะชา, มาริแย โส๊ะเด็น และ ศรีณยา เสงส์สวัสดิ์. (2564). ผลรวมของลำดับฟิโบนัชชีทั่วไป และลำดับลูคัสทั่วไป. *งานประชุมวิชาการระดับชาติ และนานาชาติ ครั้งที่ 4 วันที่ 21 พฤษภาคม 2564 นวัตกรรมสร้างสรรค์เพื่อการสร้างเสริมพลังทางสังคมด้วยวิถีชีวิตใหม่*. ร้อยเอ็ด: มหาวิทยาลัยราชภัฏร้อยเอ็ด, 415-422.
- Suvarnamani, A. (2016). Some Properties of (p, q) - Lucas Number. *KYUNGPOOK Math. J.*, 56, 367-370.
- Suvarnamani, A. (2018). Some Propertice of the generalized (p, q) - Fibonacci - Like number. *MATEC Web of Comferences*, 189, 03028.
- Svarnamani, A.; Tatong, M. (2017). Sume Porperties of the product of (p, q) - Fibonacci and (p, q) - Lucas number. *International Journal of geomate*, 13, 16-19.
- Tasyudu, Y. (2019). Generalized (p, q) - Fibonacci - Like Sequence and Their Properties. *Journal of Mathematics Research*, 11(6), 43.
- Thongkam, B.; Butsuwan, K.; Bunya, P. (2020). Some porperties of (p, q) - Fibonacci - Like and (p, q) - Lucas number. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 26(1), 216-224.