

การประชุมวิชาการระดับชาติ

ด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และนวัตกรรม ครั้งที่ 4 ประจำปี 2565

4th National Conference in Science, Technology and Innovation 2022

**วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สร้างสรรค์นวัตกรรมเพื่อชุมชน**

Proceedings

- วิทยาศาสตร์กายภาพ
- วิทยาศาสตร์ชีวภาพ
- วิทยาศาสตร์สุขภาพ
- วิทยาศาสตร์ประยุกต์

- วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีประยุกต์
- สื่อ ศิลปะ และเทคโนโลยี

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย



สารบัญ

ชื่อบทความ	หน้า
1. จำนวนพีโบนาคีทั่วไปและจำนวนลูคัสทั่วไป <i>ยงยศ ลักหลัด อาลาวิ สายวาริ ศรัณยา เฮงสวัสดิ์ และ ภัทราวรรณ สิงควานนท์</i>	1
2. วิธีการแทนสมการ และวิธีการฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับหาผลเฉลยของสมการ Korteweg-de Vries (3+1) มิติ <i>จิรวดี อุษพานิชย์ เปรมอนันต์ ศิริแข็ง และ สิทธิพร ถมจ่อหอ</i>	7
3. การวิเคราะห์ปริมาณคาเฟอีนในตัวอย่างชาและกาแฟ ในเขตพื้นที่มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย <i>สุพัฒน์ พระเมืองคง และ วราภรณ์ พระเมืองคง</i>	44
4. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับการแพร่ระบาดของโควิด-19 <i>ธนาภรณ์ จันทร์ทอง วิศิศา หว่างเปี้ย ประพรรณพร รัตนะ และ อติศักดิ์ เต็นเพ็ชรหนอง</i>	51
5. ความหลากหลายและความชุกชุมของผีเสื้อกลางคืน ในเขตพื้นที่เกษตรกรรม ศูนย์เรียนรู้การเพิ่มประสิทธิภาพการผลิตสินค้าเกษตร ตำบลน้ำสวย อำเภอเมือง จังหวัดเลย <i>อารัญญา สาสุข และ กิตติ ตันเมืองปัก</i>	60
6. การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่า pH ในดินต่อความหลากหลายของหอยทากบก ในเขตตำบลบริบูรณ์ อำเภอสีชมพู จังหวัดขอนแก่น <i>อาทิตย์ แก้วสว่าง พงษ์พิพัฒน์ สุวรรณะ และ กิตติ ตันเมืองปัก</i>	73
7. ความหลากหลาย และความชุกชุมของด้วง ในเขตพื้นที่เกษตรกรรม ศูนย์เรียนรู้การเพิ่มประสิทธิภาพการผลิตสินค้าเกษตร ตำบลน้ำสวย อำเภอเมือง จังหวัดเลย <i>ธัญญารัตน์ จันทโคศรี และ กิตติ ตันเมืองปัก</i>	84
8. การปนเปื้อนเชื้อ <i>Staphylococcus aureus</i> และเชื้อ <i>Salmonella</i> spp. ในอำเภนมคลุก สลัดโรล และแซนด์วิช จากร้านค้าแผงลอยที่จำหน่าย บริเวณรอบมหาวิทยาลัยราชภัฏเลย <i>ศิริวรรณ พลดงนอก ปาริชาติ ช่างหล่อ และ เนตรนภา เกล็ดจัน</i>	95
9. อิทธิพลของการทำนาข้าวแบบใช้สารเคมีสังเคราะห์ต่อความหลากหลายของแมงมุม <i>อธิปัตย์ อุคิลปกิจ พัทธี วิชิตพันธ์ และ กัมปนาท ธาราภูมิ</i>	104
10. ผลของเครื่องดื่มแอลกอฮอล์ต่อความชุกของเชื้อราจีนัสแคนดิดาในช่องปาก <i>ชลธิชา จินาพร</i>	111
11. ผลของความเครียดจากเกลือและออสโมติกต่อลักษณะสัณฐานของแบบจำลองเซลล์ของพืช <i>สุรศักดิ์ ละลอกน้ำ วรัญญา แก้วคำ สาลินี เต็งน้อย ทรงกลด ไบยา อาภรณ์ บัวหลวง และ บงกช บุญบุรพงค์</i>	118
12. การศึกษาความชุกชุมของหอยทากบกในเขตตำบลบริบูรณ์ อำเภอสีชมพู จังหวัดขอนแก่น <i>กิตติโรจน์ แสนสุนนท์ นันทพงศ์ บุญสะอาด และ กิตติ ตันเมืองปัก</i>	128

จำนวนฟีโบนัชชีทั่วไปและจำนวนลูคัสทั่วไป

On Generalized Fibonacci and Generalized Lucas Numbers

ยงยศ สักหลัด¹ อาลาวี สายวารี¹ ศรีณยา เสงส์สวัสดิ์¹ และ ภัทรารวรรณ สิงควานนท์^{1*}

¹หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา 90000

Yongyot Saklad¹ Alawee Saiwaree¹ Saranya Hangsawat¹ and Pattarawan Singavananda^{1*}

¹Bachelor of Science Program Mathematics, Faculty of Science, Songkhla Rajabhat University 90000

*Corresponding author E-mail: pattarawan.pe@skru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป ซึ่งจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไปนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $J_{t,n} = J_{t,n-1} + tJ_{t,n-2}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2, t \geq 1$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_{t,0} = 0, J_{t,1} = 1$ และจำนวนลูคัสทั่วไปนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $j_{t,n} = j_{t,n-1} + tj_{t,n-2}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2, t \geq 1$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $j_{t,0} = 2, j_{t,1} = 1$ ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป ดังนี้ $J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} - (-t)^n J_{t,r-n}$ เมื่อ $r \geq n \geq 0$, $J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} + (-t)^n J_{t,n-r}$ เมื่อ $n \geq r \geq 0$, $J_{t,2n-k} \cdot j_{t,2n+r} = J_{t,4n+r-k} - (-t)^{2n-k} J_{t,r+k}$ เมื่อ $r \geq k \geq 0$ และ $2n \geq k \geq 0$, $J_{t,2n+k} \cdot j_{t,2n-r} = J_{t,4n+k-r} + (-t)^{2n-r} J_{t,k+r}$ เมื่อ $k \geq r \geq 0$ และ $2n \geq r \geq 0$

คำสำคัญ: จำนวนฟีโบนัชชี จำนวนลูคัส จำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป จำนวนลูคัสทั่วไป

ABSTRACT

In this paper, we investigate about generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers. Generalized Fibonacci numbers [1] are defined by the recurrence relation $J_{t,n} = J_{t,n-1} + tJ_{t,n-2}$ for positive integers $n \geq 2, t \geq 1$ with initial conditions $J_{t,0} = 0, J_{t,1} = 1$. Generalized Lucas numbers [2] are defined by the recurrence relation $j_{t,n} = j_{t,n-1} + tj_{t,n-2}$ for positive integers $n \geq 2, t \geq 1$ with initial conditions $j_{t,0} = 2, j_{t,1} = 1$. In this paper, we obtain the relationships between the generalized Fibonacci numbers [3] and generalized Lucas numbers as follows: $J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} - (-t)^n J_{t,r-n}$ where $r \geq n \geq 0$, $J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} + (-t)^n J_{t,n-r}$ where $n \geq r \geq 0$, $J_{t,2n-k} \cdot j_{t,2n+r} = J_{t,4n+r-k} - (-t)^{2n-k} J_{t,r+k}$ where $r \geq k \geq 0$ and $2n \geq k \geq 0$, $J_{t,2n+k} \cdot j_{t,2n-r} = J_{t,4n+k-r} + (-t)^{2n-r} J_{t,k+r}$ where $k \geq r \geq 0$ and $2n \geq r \geq 0$

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Generalized Fibonacci numbers, Generalized Lucas numbers

บทนำ

ในปี 1996, Horadam [4] ได้ให้นิยามของจำนวนจาโคปทัล J_n และจำนวนจาโคปทัล-ลูคัส j_n ดังนี้

บทนิยาม 1.1 จำนวนจาโคปทัล J_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_0 = 0$ และ $J_1 = 1$

จากบทนิยาม 1.1 นี้จะได้ลำดับจาโคปทัล คือ $0, 1, 1, 3, 5, 11, \dots$

บทนิยาม 1.2 จำนวนจาโคปทัล-ลูคัส j_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, n \geq 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $j_0 = 2$ และ $j_1 = 1$

จากบทนิยาม 1.2 นี้จะได้ลำดับจาโคปทัล-ลูคัส คือ $2, 1, 5, 7, 17, 31, \dots$

ในปี 2019 [5] ได้ให้นิยามของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป ดังนี้

บทนิยาม 1.3 จำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป $J_{t,n}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$J_{t,n} = J_{t,n-1} + tJ_{t,n-2}, n \geq 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_{t,0} = 0$ และ $J_{t,1} = 1$

จากบทนิยาม 1.3 นี้จะได้ลำดับฟีโบนัชชีทั่วไปคือ $0, 1, 1, 1+t, 1+2t, 1+3t+t^2, \dots$

สูตรบีเนต (Binet's formule) ของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป $J_{t,n}$ คือ

$$J_{t,n} = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2} \right)^n \right] = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$

สังเกตว่าจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป $J_{t,n}$ จะเป็นลำดับฟีโบนัชชี F_n เมื่อ $t = 1$

บทนิยาม 1.4 จำนวนลูคัสทั่วไป $j_{t,n}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$j_{t,n} = j_{t,n-1} + tj_{t,n-2}, n \geq 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $j_{t,0} = 2$ และ $j_{t,1} = 1$

จากบทนิยามที่ 1.4 นี้จะได้ลำดับลูคัสทั่วไปคือ $2, 1, 1+2t, 1+3t, 1+4t+2t^2, \dots$

สูตรบีเนต (Binet's formule) ของจำนวนลูคัสทั่วไป $j_{t,n}$ คือ

$$j_{t,n} = \left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2} \right)^n = \alpha^n + \beta^n$$

เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$

สังเกตว่าจำนวนลูคัสทั่วไป $j_{t,n}$ จะเป็นลำดับลูคัส L_n เมื่อ $t = 1$

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้รับแรงบันดาลใจจากจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไปในบทนิยามที่ 1.3 และ 1.4 โดยผู้วิจัยได้นำมาศึกษาเพิ่มเติมต่อยอดเกี่ยวกับผลคูณระหว่างจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป

วิธีการวิจัย

1. ศึกษาหัวข้อที่สนใจเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไปและจำนวนลูคัสทั่วไป
2. หาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไปและจำนวนลูคัสทั่วไป
3. นำข้อมูลที่ศึกษาจากหัวข้อที่สนใจมาศึกษาและต่อยอด
4. หาผลลัพธ์ใหม่

ผลการวิจัย

ในงานนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการคูณของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป $J_{t,n}$ และจำนวนลูคัสทั่วไป $j_{t,n}$

ทฤษฎีบท 1 ให้ t, n และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $t \geq 1$ และ $r \geq n \geq 0$ จะได้

$$J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} - (-t)^n J_{t,r-n}$$

พิสูจน์ จากสูตรบินต์ของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } J_{t,n} \cdot j_{t,r} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^r + \beta^r) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+r} - \beta^{n+r} + \alpha^n \beta^r - \alpha^r \beta^n) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + (\alpha^n \beta^r - \alpha^r \beta^n)) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + \left(\alpha^n \beta^r \left(\frac{\beta^n}{\beta^n} \right) - \alpha^r \beta^n \left(\frac{\alpha^n}{\alpha^n} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + ((\alpha\beta)^n (\beta^{r-n} - \alpha^{r-n}))) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + ((\alpha\beta)^n (\alpha^{r-n} - \beta^{r-n}))) \\ &= \frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} - \frac{(\alpha\beta)^n (\alpha^{r-n} - \beta^{r-n})}{\alpha - \beta} \\ &= J_{t,n+r} - (-t)^n J_{t,r-n} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2 ให้ t, n และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $t \geq 1$ และ $n \geq r \geq 0$ จะได้

$$J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} + (-t)^n J_{t,n-r}$$

พิสูจน์ จากสูตรบีเนต์ของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } J_{t,n} \cdot j_{t,r} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^r + \beta^r) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+r} - \beta^{n+r} + \alpha^n \beta^r - \alpha^r \beta^n) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + (\alpha^n \beta^r - \alpha^r \beta^n)) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + \left(\alpha^n \beta^r \left(\frac{\alpha^r}{\alpha^r} \right) - \alpha^r \beta^n \left(\frac{\beta^r}{\beta^r} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + ((\alpha\beta)^r (\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}))) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}) + ((\alpha\beta)^r (\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}))) \\ &= \frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} + \frac{(\alpha\beta)^r (\alpha^{n-r} - \beta^{n-r})}{\alpha - \beta} \\ &= J_{t,n+r} + (-t)^r J_{t,n-r} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3 ให้ t, n, k และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $t \geq 1$ และ $r \geq k \geq 0$ และ $2n \geq k \geq 0$ จะได้

$$J_{t,2n-k} \cdot j_{t,2n+r} = J_{t,4n+r-k} - (-t)^{2n-k} J_{t,r+k}$$

พิสูจน์ จากสูตรบีเนต์ของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } J_{t,2n-k} \cdot j_{t,2n+r} &= \left(\frac{\alpha^{2n-k} - \beta^{2n-k}}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^{2n+r} + \beta^{2n+r}) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{4n+r-k} - \beta^{4n+r-k} + \alpha^{2n-k} \beta^{2n+r} - \alpha^{2n+r} \beta^{2n-k}) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{4n+r-k} - \beta^{4n+r-k}) + (\alpha^{2n-k} \beta^{2n+r} - \alpha^{2n+r} \beta^{2n-k})) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((\alpha^{4n+r-k} - \beta^{4n+r-k}) + \left((\alpha\beta)^{2n} \left(\frac{\beta^r}{\alpha^k} - \frac{\alpha^r}{\beta^k} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((\alpha^{4n+r-k} - \beta^{4n+r-k}) + \left((\alpha\beta)^{2n} \left(\frac{\beta^{r+k} - \alpha^{r+k}}{(\alpha\beta)^k} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{4n+r-k} - \beta^{4n+r-k}) + ((\alpha\beta)^{2n-k} (\beta^{r+k} - \alpha^{r+k}))) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{4n+r-k} - \beta^{4n+r-k}) - ((\alpha\beta)^{2n-k} (\alpha^{r+k} - \beta^{r+k}))) \\ &= \frac{\alpha^{4n+r-k} - \beta^{4n+r-k}}{\alpha - \beta} - \frac{(\alpha\beta)^{2n-k} (\alpha^{r+k} - \beta^{r+k})}{\alpha - \beta} \\ &= J_{t,4n+r-k} - (-t)^{2n-k} J_{t,r+k} \end{aligned}$$

บทแทรก 4 ให้ t, n, k และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $t \geq 1$ และ $r \geq k \geq 0$ และ $2n \geq k \geq 0$ จะได้

$$(1) J_{t,2n-1} \cdot J_{t,2n+r} = J_{t,4n+r-1} - (-t)^{2n-1} J_{t,r+1}$$

$$(2) J_{t,2n-k} \cdot J_{t,2n+1} = J_{t,4n-k+1} - (-t)^{2n-k} J_{t,k+1}$$

$$(3) J_{t,2n-1} \cdot J_{t,2n+1} = J_{t,4n} - (-t)^{2n-1}$$

พิสูจน์ แทน $k = 1$ ในทฤษฎีบท 3 จะได้

$$J_{t,2n-1} \cdot J_{t,2n+r} = J_{t,4n+r-1} - (-t)^{2n-1} J_{t,r+1}$$

แทน $r = 1$ ในทฤษฎีบท 3 จะได้

$$J_{t,2n-k} \cdot J_{t,2n+1} = J_{t,4n-k+1} - (-t)^{2n-k} J_{t,k+1}$$

แทน $k = 1$ และ $r = 1$ ในทฤษฎีบท 3 จะได้

$$J_{t,2n-1} \cdot J_{t,2n+1} = J_{t,4n} - (-t)^{2n-1}$$

ทฤษฎีบท 5 ให้ t, n, k และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $t \geq 1$ และ $k \geq r \geq 0$ และ $2n \geq r \geq 0$ จะได้

$$J_{t,2n+k} \cdot J_{t,2n-r} = J_{t,4n+k-r} + (-t)^{2n-r} J_{t,k+r}$$

พิสูจน์ จากสูตรบีเนตของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป และจำนวนลูคัสทั่วไป

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } J_{t,2n+k} \cdot J_{t,2n-r} &= \left(\frac{\alpha^{2n+k} - \beta^{2n+k}}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^{2n-r} + \beta^{2n-r}) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{4n+k-r} - \beta^{4n+k-r} + \alpha^{2n+k} \beta^{2n-r} - \alpha^{2n-r} \beta^{2n+k}) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{4n+k-r} - \beta^{4n+k-r}) + (\alpha^{2n+k} \beta^{2n-r} - \alpha^{2n-r} \beta^{2n+k})) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((\alpha^{4n+k-r} - \beta^{4n+k-r}) + \left((\alpha\beta)^{2n} \left(\frac{\alpha^k}{\beta^r} - \frac{\beta^k}{\alpha^r} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((\alpha^{4n+k-r} - \beta^{4n+k-r}) + \left((\alpha\beta)^{2n} \left(\frac{\alpha^{k+r} - \beta^{k+r}}{(\alpha\beta)^r} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{4n+k-r} - \beta^{4n+k-r}) + ((\alpha\beta)^{2n-r} (\alpha^{k+r} - \beta^{k+r}))) \\ &= \frac{\alpha^{4n+k-r} - \beta^{4n+k-r}}{\alpha - \beta} + \frac{(\alpha\beta)^{2n-r} (\alpha^{k+r} - \beta^{k+r})}{\alpha - \beta} \\ &= J_{t,4n+k-r} + (-t)^{2n-r} J_{t,k+r} \end{aligned}$$

บทแทรก 6 ให้ t, n, k และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $t \geq 1$ และ $k \geq r \geq 0$ และ $2n \geq r \geq 0$ จะได้

$$(1) J_{t,2n+1} \cdot j_{t,2n-r} = J_{t,4n-r+1} + (-t)^{2n-r} J_{t,r+1}$$

$$(2) J_{t,2n+k} \cdot j_{t,2n-1} = J_{t,4n+k-1} + (-t)^{2n-1} J_{t,k+1}$$

$$(3) J_{t,2n+1} \cdot j_{t,2n-1} = J_{t,4n} + (-t)^{2n-1}$$

พิสูจน์ แทน $k = 1$ ในทฤษฎีบท 5 จะได้

$$J_{t,2n+1} \cdot j_{t,2n-r} = J_{t,4n-r+1} + (-t)^{2n-r} J_{t,r+1}$$

แทน $r = 1$ ในทฤษฎีบท 5 จะได้

$$J_{t,2n+k} \cdot j_{t,2n-1} = J_{t,4n+k-1} + (-t)^{2n-1} J_{t,k+1}$$

แทน $k = 1$ และ $r = 1$ ในทฤษฎีบท 5 จะได้

$$J_{t,2n+1} \cdot j_{t,2n-1} = J_{t,4n} + (-t)^{2n-1}$$

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณของจำนวนฟีโบนัชชีทั่วไป $J_{t,n}$ และจำนวนลูคัสทั่วไป $j_{t,n}$ ดังนี้
 $J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} - (-t)^n J_{t,r-n}$ เมื่อ $r \geq n \geq 0$, $J_{t,n} \cdot j_{t,r} = J_{t,n+r} + (-t)^n J_{t,n-r}$ เมื่อ $n \geq r \geq 0$,
 $J_{t,2n-k} \cdot j_{t,2n+r} = J_{t,4n+r-k} - (-t)^{2n-k} J_{t,r+k}$ เมื่อ $r \geq k \geq 0$ และ $2n \geq k \geq 0$,
 $J_{t,2n+k} \cdot j_{t,2n-r} = J_{t,4n+k-r} + (-t)^{2n-r} J_{t,k+r}$ เมื่อ $k \geq r \geq 0$ และ $2n \geq r \geq 0$

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา ทุกท่านที่ให้คำปรึกษา และความรู้ในการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์จนกระทั่งวิจัยฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- [1] Prodinger, H. and Tichy, R.F. 1982. Fibonacci numbers in graphs. **Fibonacci Quart**, 20, 16–21.
- [2] Włoch, A. 2013. Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas numbers, **Appl. Math. Comput.** 219 5564–5568.
- [3] Włoch, A. 2012. On generalized Fibonacci numbers and k-distance Kp-matchings in graphs, **Discrete Appl Math.** 160 1399–1405.
- [4] Horadam. 1996. A.F.: Jacobsthal number representation. **Fibonacci Quart**, 34(1): 40–54
- [5] Szynal-Liana, A., Włoch, I. and Liana, M. 2020. Some identities for generalized Fibonacci and Lucas numbers. **AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics**, 17(1):324-328, DOI:10.1016/j.akcej.2019.06.007.



www.ncst.lru.ac.th/



www.sci.lru.ac.th/th/



www.facebook.com/scilruloei