

จำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสามทั่วไป

On Generalized Third-order Balancing-like Numbers

ลดาวัลย์ เผื่อแก้ว¹, สุภานันท์ เนาวรัตน์², ซานิตย์ ฤทธิเดช^{3*}

Ladawan Fueakaew¹, Supanan Naowarat², Sanit Rithidej^{3*}

¹ นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา 90000

² นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา 90000

³ อาจารย์ หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา 90000

* Corresponding author email: sanit.ri@skru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม และจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัส และได้นิยามจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสามทั่วไป และกรณีพิเศษ 2 กรณี ซึ่งได้แก่ จำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม และจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัสอันดับสาม สร้างสูตรบินต์ ฟังก์ชันก่อกำเนิด บางเอกลักษณ์ และสูตรผลรวม

คำสำคัญ: สูตรบินต์ จำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม จำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัสอันดับสาม

Abstract

In this paper, we discuss about balancing-like and balancing-like Lucas and define the generalized third-order balancing-like number and two special cases, balancing-like and balancing-like Lucas numbers. We investigate Binet's formulas, generating functions, some identities and summation formulas.

Keywords: Binet's formulas, third-order balancing-like numbers, third-order balancing-like Lucas numbers

1. บทนำ

Panda G.K. และ Panda A.K. (2014) ได้แนะนำเกี่ยวกับจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสามและจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัส ในรูปของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน N_k, σ_k ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเพลล์ (Pell's Equation) $N^2 - 12\sigma^2 = 1$ ที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม และได้แสดงลำดับของจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสามและคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัส โดยกำหนดให้ $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นสัญลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุลงอันดับสาม ซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$L_{n+1} = 4L_n - L_{n-1}, \forall n \geq 1$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $L_0 = 0$ และ $L_1 = 1$ และ $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นสัญลักษณ์ของลำดับคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัส ซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$M_{n+1} = 4M_n - M_{n-1}, \forall n \geq 1$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $M_0 = 1$ และ $M_1 = 2$

ในงานวิจัยนี้ ได้นำความสัมพันธ์ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม และจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัส มาสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสามทั่วไป ซึ่งจะมีสองกรณีย่อย ได้แก่ จำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม และจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม-ลูคัส และสร้างสูตรบินต์ ฟังก์ชันก่อกำเนิด บางเอกลักษณ์ และสูตรผลรวม

ลำดับไตรโบนากชีทั่วไป $\{W_n(W_0, W_1, W_2; r, s, t)\}_{n \geq 0}$ (หรือเขียนโดยย่อ $\{W_n\}_{n \geq 0}$) นิยามโดย

$$W_n = rW_{n-1} + sW_{n-2} + tW_{n-3} \quad W_0 = a, \quad W_1 = b, \quad W_2 = c, \quad n \geq 3 \quad (1.1)$$

โดยที่ w_0, w_1, w_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือจำนวนจริง และ r, s, t เป็นจำนวนจริง ลำดับนี้ได้รับการศึกษาโดยนักวิจัยเป็นจำนวนมาก ซึ่งสามารถดูได้ใน (Bruce, 1984; Spickerman, 1980; Soykan, 2019; Yilmaz & Taskara, 2014)

ให้ $\{W_n\}$ เป็นลำดับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะ

$$x^3 - rx^2 - sx - t = 0 \quad (1.2)$$

มีรากของสมการลักษณะเฉพาะ ดังนี้

$$\alpha = \alpha(r, s, t) = \frac{r}{3} + A + B$$

$$\beta = \beta(r, s, t) = \frac{r}{3} + \omega A + \omega^2 B$$

$$\gamma = \gamma(r, s, t) = \frac{r}{3} + \omega^2 A + \omega B$$

$$\text{โดยที่ } A = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} + \sqrt{\Delta} \right)^{1/3}, \quad B = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} - \sqrt{\Delta} \right)^{1/3}, \quad \Delta = \Delta(r, s, t) = \frac{r^3 t}{27} - \frac{r^2 s^2}{108} + \frac{rst}{6} - \frac{s^3}{27} + \frac{t^2}{4}$$

$$\text{และ } \omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \exp(2\pi i / 3)$$

ข้อสังเกต $\alpha + \beta + \gamma = r, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -s$ และ $\alpha\beta\gamma = t$

ถ้า $\Delta(r, s, t) > 0$ แล้วสมการ (1.2) จะมีหนึ่งผลเฉลยเป็นจำนวนจริง (α) และอีกสองผลเฉลยเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น จะได้สูตรบีเนตของจำนวนไตรโบนักชีทั่วไป สำหรับจำนวนเต็ม n ทั้งหมด ดังนี้

$$W_n = \frac{b_1 \alpha^n}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{b_2 \beta^n}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{b_3 \gamma^n}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \quad (1.3)$$

$$\text{โดยที่ } b_1 = U_2 - (\beta - \gamma)U_1 + \beta\gamma U_0, \quad b_2 = U_2 - (\alpha + \gamma)U_1 + \alpha\gamma U_0, \quad b_3 = U_2 - (\alpha + \beta)U_1 + \alpha\beta U_0$$

สูตรบีเนตของลำดับจะสอดคล้องสมการ (1.2) สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่ง Howard and Saidak (2010) ได้พิสูจน์ผลลัพธ์เหล่านี้ไว้แล้ว

2. วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ศึกษาจำนวนคล้ายสมดุล จำนวนคล้ายสมดุล-ลูคัส และลำดับไตรโบนักชีทั่วไป สร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนคล้ายสมดุลอันดับสามทั่วไป จากนั้นนำความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าว ไปสร้างสูตรบีเนต ฟังก์ชันก่อกำเนิด บางเอกลักษณ์ และสูตรผลรวม

3. ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะพิจารณา $r = 4, s = -1, t = 1$ และให้ $W_n = U_n$ ดังนั้น จะได้ลำดับคล้ายสมดุลอันดับสามทั่วไป $\{U_n\}_{n \geq 0} = \{U_n(U_0, U_1, U_2)\}_{n \geq 0}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ดังนี้

$$U_n = 4U_{n-1} - U_{n-2} + U_{n-3} \quad (3.1)$$

โดยค่าเริ่มต้น $U_0 = a, U_1 = b, U_2 = c$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด

จากสมการ (1.3) จะได้สูตรบีเนตของลำดับคล้ายสมดุลอันดับสามทั่วไป ดังนี้

$$U_n = \frac{b_1 \alpha^n}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{b_2 \beta^n}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{b_3 \gamma^n}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \quad (3.2)$$

$$\text{โดยที่ } b_1 = U_2 - (\beta - \gamma)U_1 + \beta\gamma U_0, \quad b_2 = U_2 - (\alpha + \gamma)U_1 + \alpha\gamma U_0, \quad b_3 = U_2 - (\alpha + \beta)U_1 + \alpha\beta U_0$$

และ α, β และ γ รากของสมการลักษณะเฉพาะ $x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$ นั่นคือ

$$\alpha = \frac{4}{3} + \left(\frac{119}{54} + \sqrt{\frac{119}{108}} \right)^{1/3} + \left(\frac{119}{54} - \sqrt{\frac{119}{108}} \right)^{1/3}$$

$$\beta = \frac{4}{3} + \omega \left(\frac{119}{54} + \sqrt{\frac{119}{108}} \right)^{1/3} + \omega^2 \left(\frac{119}{54} - \sqrt{\frac{119}{108}} \right)^{1/3}$$

$$\gamma = \frac{4}{3} + \omega^2 \left(\frac{119}{54} + \sqrt{\frac{119}{108}} \right)^{1/3} + \omega \left(\frac{119}{54} - \sqrt{\frac{119}{108}} \right)^{1/3}$$

ซึ่ง $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \exp(2\pi i / 3)$ และจะได้

$$\alpha + \beta + \gamma = 4$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

ตารางที่ 1 แสดง ลำดับคล้ายสมดุลง่ายไปอันดับสามของ 8 พจน์แรก

n	U_n
0	U_0
1	U_1
2	U_2
3	$4U_2 - U_1 + U_0$
4	$15U_2 - 3U_1 + 4U_0$
5	$57U_2 - 11U_1 + 15U_0$
6	$217U_2 - 42U_1 + 57U_0$
7	$826U_2 - 160U_1 + 217U_0$
8	$3144U_2 - 609U_1 + 826U_0$

ต่อไปนี้จะพิจารณาลำดับคล้ายสมดุลง่ายอันดับสามทั่วไป $\{U_n\}_{n \geq 0}$ ซึ่งมีสองกรณี คือ ลำดับคล้ายสมดุลง่ายอันดับสาม $\{L_n\}_{n \geq 0}$ และลำดับคล้ายสมดุลง่ายอันดับสาม $\{M_n\}_{n \geq 0}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$L_n = 4L_{n-1} - L_{n-2} + L_{n-3}, \quad L_0 = 0, L_1 = 1, L_2 = 4 \quad (3.3)$$

$$M_n = 4M_{n-1} - M_{n-2} + M_{n-3}, \quad M_0 = 1, M_1 = 2, M_2 = 7 \quad (3.4)$$

ตามลำดับ

จากสมการ (3.3) และ (3.4) จะได้สูตรปิดของจำนวนคล้ายสมดุลง่ายอันดับสาม และจำนวนคล้ายสมดุลง่ายอันดับสาม ดังนี้

$$L_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \quad (3.5)$$

$$M_n = \frac{\alpha^{n+1}(\alpha - 2)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+1}(\beta - 2)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}(\gamma - 2)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \quad (3.6)$$

ทฤษฎีบท 1 ให้ $U_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดทั่วไปของลำดับคล้ายสมดุลงานอันดับสาม $\{U_n\}_{n \geq 0}$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = \frac{(U_2 - U_1 + 4U_0)x^2 + (U_1 - U_0)x + U_0}{x^3 - 4x^2 + x - 1} \quad (3.7)$$

พิสูจน์

ให้ $xU_n(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$, $U_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$, $4x^2U_n(x) = 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$ และ $x^3U_n(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$ จะได้

$$\begin{aligned} (-1 + x - 4x^2 + x^3)U_n(x) &= - \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n \\ &= -(U_0 + U_1x + U_2x^2) + (U_0x + U_1x^2) - 4U_0x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-U_n + U_{n-1} - 4U_{n-2} + U_{n-3})x^n \\ &= U_0 + (U_1 - U_0)x + (U_2 - U_1 + 4U_0)x^2 \end{aligned}$$

จะได้ ฟังก์ชันก่อกำเนิดทั่วไปของลำดับคล้ายสมดุลงานอันดับสาม

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = \frac{(U_2 - U_1 + 4U_0)x^2 + (U_1 - U_0)x + U_0}{x^3 - 4x^2 + x - 1}$$

บทแทรก 2 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับคล้ายสมดุลงานอันดับสาม $\{L_n\}$ และลำดับคล้ายสมดุลงานอันดับสาม $\{M_n\}$

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{3x^2 + x}{x^3 - 4x^2 + x - 1}$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n = \frac{9x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + x - 1}$$

พิสูจน์ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (3.1) แทนค่าโดยให้ $a = 0, b = 1, c = 4$ และ $a = 1, b = 2, c = 7$ จะได้ ความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนคล้ายสมดุลงานอันดับสาม จำนวนคล้ายสมดุลงานอันดับสาม ดังสมการ (3.3) และ (3.4) ตามลำดับ นำไปแทนค่าในสมการ (3.7) จะได้บทแทรก 2

ทฤษฎีบท 3 สำหรับ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$(1) \quad M_n = -2L_{n+3} + 8L_{n+2} - L_{n+1}, \quad n \geq 0$$

$$(2) \quad M_n = L_{n+1} - 2L_n, \quad n \geq 0$$

$$(3) \quad M_n = 2L_n - L_{n-1} - L_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$(4) \quad M_n = 7L_{n-1} - L_{n-2} + 2L_{n-3}, \quad n \geq 3$$

พิสูจน์ ให้

$$M_n = aL_{n+3} + bL_{n+2} + cL_{n+1} \quad (3.8)$$

สำหรับ $n = 1, 2, 3$ จะได้

$$M_0 = aL_3 + bL_2 + cL_1$$

$$M_1 = aL_4 + bL_3 + cL_2$$

$$M_2 = aL_5 + bL_4 + cL_3$$

จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น จะได้

$$\begin{aligned} 15a + 4b + c &= 1 \\ 57a + 15b + 4c &= 2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$217a + 57b + 15c = 7$$

หาค่า a, b และ c โดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ จะได้ $a = -2, b = 8$ และ $c = -1$ จะได้

$$M_n = -2L_{n+3} + 8L_{n+2} - L_{n+1} \quad (3.10)$$

จากสมการ (3.3) และ (3.10) จะได้

$$\begin{aligned} M_n &= L_{n+1} - 2L_n \\ M_n &= 2L_n - L_{n-1} + L_{n-2} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4 สำหรับ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

- (1) $7L_n = -3M_{n+3} + 13M_{n+2} - 5M_{n+1}, n \geq 0$
- (2) $7L_n = M_{n+2} - 2M_{n+1} - 3M_n, n \geq 0$
- (3) $7L_n = 2M_{n+1} - 4M_n + M_{n-1}, n \geq 1$
- (4) $7L_n = 4M_n - M_{n-1} + 2M_{n-2}, n \geq 0$

พิสูจน์ ให้

$$L_n = aM_{n+3} + bM_{n+2} + cM_{n+1} \quad (3.11)$$

สำหรับ $n = 1, 2, 3$ จะได้

$$\begin{aligned} L_0 &= aM_3 + bM_2 + cM_1 \\ L_1 &= aM_4 + bM_3 + cM_2 \\ L_2 &= aM_5 + bM_4 + cM_3 \end{aligned}$$

ดังนั้น จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น จะได้

$$\begin{aligned} 27a + 7b + 2c &= 0 \\ 103a + 27b + 7c &= 1 \\ 392a + 103b + 27c &= 4 \end{aligned} \quad (3.12)$$

หาค่า a, b และ c โดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ จะได้ $a = -\frac{3}{7}, b = \frac{13}{7}$ และ $c = -\frac{5}{7}$ จะได้

$$7L_n = -3M_{n+3} + 13M_{n+2} - 5M_{n+1} \quad (3.13)$$

จากสมการ (3.4) และ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned} 7L_n &= M_{n+2} - 2M_{n+1} - 3M_n \\ 7L_n &= 2M_{n+1} - 4M_n + M_{n-1} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5 สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จะได้

$$(1) \sum_{k=0}^n U_k = \frac{U_{n+3} - 3U_{n+2} - 2U_{n+1} - U_2 + 3U_1 + 2U_0}{3}$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n U_{2k} = \frac{2U_{2n+2} - 3U_{2n+1} + 5U_{2n} + 3U_1 + 16U_0}{21}$$

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n U_{2k+1} = \frac{5U_{2n+2} + 3U_{2n+1} + 5U_{2n} - 5U_2 + 18U_1 - 2}{21}$$

พิสูจน์

จากสมการ (3.1) จะได้

$$U_{k-3} = U_k - 4U_{k-1} + U_{k-2} \quad , n \geq 3$$

ดังนั้น

$$U_0 = U_3 - 4U_2 + U_1$$

$$U_1 = U_4 - 4U_3 + U_2$$

$$U_2 = U_5 - 4U_4 + U_3$$

⋮

$$U_{n-3} = U_n - 4U_{n-1} + U_{n-2}$$

$$U_{n-2} = U_{n+1} - 4U_n + U_{n-1}$$

$$U_{n-1} = U_{n+2} - 4U_{n+1} + U_n$$

จากสมการข้างต้น จะได้

$$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 + U_2 + 2U_3 + 2U_4 + \dots + 2U_{n+1} + U_{n+2} + U_{n+3} - 4U_2 - 4U_3 - 4U_4 - \dots - 4U_{n+2}$$

$$\sum_{k=0}^n U_k = U_1 - 3U_2 - 2 \sum_{k=0}^n U_k - 2U_{n+1} - 3U_{n+2} + U_{n+3} + 2U_0 + 2U_1 + 2U_2$$

จะได้
$$\sum_{k=0}^n U_k = \frac{2U_0 + 3U_1 - U_2 - 2U_{n+1} - 3U_{n+2} + U_{n+3}}{3}$$

ต่อไปนี้จะแสดงพจน์ดรชนีคู่และดรชนีคี่ จากสมการ (3.1) จะได้

$$4U_{k-1} = U_k + U_{k-2} - U_{k-3} \quad , n \geq 3$$

สำหรับ ดรชนีเลขคู่จะได้

$$4U_2 = U_3 + U_1 - U_0$$

$$4U_4 = U_5 + U_3 - U_2$$

$$4U_6 = U_7 + U_5 - U_4$$

⋮

$$4U_{2n-4} = U_{2n-3} + U_{2n-5} - U_{2n-6}$$

$$4U_{2n-2} = U_{2n-1} + U_{2n-3} - U_{2n-4}$$

$$4U_{2n} = U_{2n+1} + U_{2n-1} - U_{2n-2}$$

$$4 \sum_{k=0}^n U_{2k} = U_1 + (2U_3 + 2U_5 + \dots + 2U_{2n-1}) + 2U_{2n+1} + U_{2n+1} - U_0 - (U_2 + U_4 + \dots + U_{2n-2})$$

$$= U_1 + 2 \sum_{k=1}^n U_{2k+1} - U_0 - \sum_{k=1}^n U_{2k} + U_{2n} - U_{2n+1}$$

$$5 \sum_{k=1}^n U_{2k} = U_1 + 2 \sum_{k=1}^n U_{2k+1} - U_0 + U_{2n} - U_{2n+1}$$

$$5 \sum_{k=1}^n U_{2k} - 2 \sum_{k=1}^n U_{2k+1} = U_{2n} - U_{2n+1} + U_1 - U_0 \quad (3.14)$$

และตรวจเช็คจะได้

$$4U_3 = U_4 + U_2 - U_1$$

$$4U_5 = U_6 + U_4 - U_3$$

$$4U_7 = U_8 + U_6 - U_5$$

⋮

$$4U_{2n-3} = U_{2n-2} + U_{2n-4} - U_{2n-5}$$

$$4U_{2n-1} = U_{2n} + U_{2n-2} - 4U_{2n-3}$$

$$4U_{2n+1} = U_{2n+2} + U_{2n} - U_{2n-1}$$

$$4 \sum_{k=1}^n U_{2k+1} = U_2 + (2U_4 + 2U_6 + \dots + 2U_{2n}) + U_{2n+2} - U_1 - (U_3 + U_5 + \dots + U_{2n-1})$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n U_{2k} + U_{2n+2} - U_1 - \sum_{k=1}^n U_{2k+1} - U_2 + U_{2n+1}$$

$$5 \sum_{k=1}^n U_{2k+1} = 2 \sum_{k=1}^n U_{2k} + U_{2n+2} - U_1 - U_2 + U_{2n+1}$$

$$5 \sum_{k=1}^n U_{2k+1} - 2 \sum_{k=1}^n U_{2k} = U_{2n+2} - U_{2n+1} - U_2 - U_1 \quad (3.15)$$

จากสมการ (3.14) และ (3.15) จะได้ $\sum_{k=0}^n U_{2k}$ และ $\sum_{k=0}^n U_{2k+1}$ ดังนี้

$$\sum_{k=0}^n U_{2k} = \frac{3U_1 - 16U_0 + 5U_{2n} - 3U_{2n+1} + 2U_{2n+2}}{21}$$

$$\sum_{k=0}^n U_{2k+1} = \frac{5U_{2n+2} - 3U_{2n+1} + 2U_{2n} - 5U_2 + 18U_1 - 2U_0}{21}$$

สำหรับลำดับคล้ายสมดุลงอันดับสาม $\{L_n\}_{n \geq 0}$ และลำดับคล้ายสมดุลงอันดับสาม $\{M_n\}_{n \geq 0}$ จะได้ดังบทแทรกต่อไป

บทแทรก 6 สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จะได้

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n L_k = \frac{1}{3}(L_{n+3} - 3L_{n+2} - 2L_{n+1} - 1)$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n L_{2k} = \frac{1}{21}(2L_{2n+4} - 3L_{2n+3} - 20L_{2n+2} - 4L_{2n} - 5)$$

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n L_{2k+1} = \frac{1}{21}(5L_{2n+2} + 3L_{2n+1} + 5L_{2n} - 4)$$

พิสูจน์ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (3.1) แทนค่าโดยให้ $a = 0, b = 1, c = 4$ จะได้ ความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนคล้ายสมดุลงอันดับสาม ดังสมการ (3.3) นำไปแทนค่าในทฤษฎีบท 5

บทแทรก 7 สำหรับ $n \geq 0$ จะได้

$$(1) \sum_{k=0}^n M_k = \frac{1}{3}(M_{n+3} - 3M_{n+2} - 2M_{n+1} + 1)$$

$$(2) \sum_{k=0}^n M_{2k} = \frac{1}{21}(2M_{2n+2} - 3M_{2n+1} + 5M_{2n} - 10)$$

$$(3) \sum_{k=0}^n M_{2k+1} = \frac{1}{21}(5M_{2n+2} - 3M_{2n+1} + 2M_{2n} - 1)$$

พิสูจน์ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด (3.1) แทนค่าโดยให้ $a = 1, b = 2, c = 7$ จะได้ ความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนคล้ายสมดุ-ลูคัสอันดับสาม ดังสมการ (3.4) นำไปแทนค่าในทฤษฎีบท 5

4. อภิปรายผลการวิจัย

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ ได้สร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับคล้ายสมดุอันดับสามทั่วไป และได้พิจารณาสองกรณีคือ ลำดับจำนวนคล้ายสมดุอันดับสาม และลำดับคล้ายสมดุ-ลูคัสอันดับสาม ซึ่งจากความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังกล่าวสามารถใช้หา สูตรบินเนต ฟังก์ชันก่อกำเนิด บางเอกลักษณ์ โดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ และผลรวมเชิงเส้น สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษาเอกลักษณ์ของจำนวนคล้ายสมดุ จำนวนคล้ายสมดุ-ลูคัส อันดับสามโดยวิธีเมทริกซ์

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลาทุกท่านที่ให้คำปรึกษา และความรู้ในการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์จนกระทั่งวิจัยฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย และขอขอบคุณเพื่อน ๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกคนที่คอยให้คำแนะนำ และกำลังใจ รวมถึงการช่วยเหลือที่มีให้กันมาตลอด

6. เอกสารอ้างอิง

- Bruce, I. (1984). A modified tribonacci Sequence. *The Fibonacci Quarterly*, 22(3), 244-246.
- Panda, A.K & Panda, G.K. (2014). Balancing-like sequences associated with integral standard deviations of consecutive natural. *Applied Mathematica Science*, 52(5), 187-192.
- Saidak, F & Howard, F. T. (2010). Zhou's theory of constructing identities. *Congress Numer*, 200, 225-237.
- Soykan, Y. (2019). On Generalized Third-Order Pell Numbers. *Asian Journal of Advanced Research and Reports*, 6(1), 1-18.
- Spickerman, W. (1980). Binet's formula for the Tribonacci sequence. *The Fibonacci Quarterly*, 20(1982), 118-120.
- Yilmaz, N. & Taskara, N. (2014). Tribonacci and tribonacci-lucas numbers via the determinants of special Matrices. *Applied Mathematical Sciences*, 8(39), 1947-1955.