



รายงานสืบเนื่อง
งานประชุมวิชาการระดับชาติ
ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7

วันที่ 10-11 มีนาคม พ.ศ. 2565
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

รายงานสืบเนื่องจากงานประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565

(The Proceedings of the 7th National Science and Technology Conference : NSCIC 2022)

จัดพิมพ์โดย คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

พิมพ์ครั้งที่ 1

ปีที่พิมพ์ 2565

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ 978-974-306-573-6

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication data

มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

รายงานสืบเนื่องจากงานประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 = The proceedings of
the 7th national science and technology conference : NSCIC 2022.--

สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี, 2565.

1638 หน้า.

1. วิทยาศาสตร์กับเทคโนโลยี -- การประชุม. I. ชื่อเรื่อง.

600

ISBN 978-974-306-573-6

สงวนลิขสิทธิ์โดย

มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

272 หมู่ที่ 9 ถนน สุราษฎร์-นาสาร ตำบลขุนทะเล อำเภอเมือง

จังหวัดสุราษฎร์ธานี 84100

โทรศัพท์ 0-7791-3333

เว็บไซต์ <https://nscic.sru.ac.th/>

จัดพิมพ์แบบ อิเล็กทรอนิกส์

บทความฉบับเต็ม

การประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565
(The Proceedings of the 7th National Science and Technology Conference:
NSCIC 2022)

ผู้จัดทำ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ที่ปรึกษา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วัฒนา รัตนพรหม
รักษาราชการแทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

กองบรรณาธิการ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพงศ์ เครือหงส์	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	ประธานกรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ขวัญกมล ขุนพิทักษ์	มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชวัลรัตน์ ศรีนวลปาน	มหาวิทยาลัยราชภัฏนครศรีธรรมราช	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลลิตา อุดยาศสน	มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์รังสรรค์ พลสมิคร	มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุธรรม ชุมพร้อมญาติ	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล ศรีวิชัยวิทยาเขตนครศรีธรรมราช (สไใหญ่)	กรรมการ
นายสุทัศน์ เหมทานนท์	วิทยาลัยพยาบาลบรมราชชนนี นครศรีธรรมราช	กรรมการ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์กันณรัตน์ หนูชุม	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	กรรมการและเลขานุการ
อาจารย์ ดร.มิตี เจียรพันธุ์	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ
อาจารย์ศักดิ์ชัย กรรमारากร	มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี	กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการ

คณะกรรมการดำเนินงาน

ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอกมหาวิทยาลัย จำนวน 62 คน
ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายในมหาวิทยาลัย จำนวน 87 คน
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ฝ่ายดำเนินงาน

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี
272 หมู่ 9 ต.ขุนทะเล อ.เมือง จ.สุราษฎร์ธานี 84100
โทรศัพท์ 077-913-366
อีเมล sci@sru.ac.th
Facebook Page @sci.sru.ac.th

สารจากคณบดี

การจัดการประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 (The 7th National Science and Technology Conference: NSCIC 2022) เป็นโครงการที่จัดต่อเนื่องทุกปีซึ่งปีนี้ถึงปีที่ 7 เพื่อเผยแพร่องค์ความรู้ที่เกิดจากงานวิจัยของนักศึกษาระดับปริญญาตรีของสถาบันเครือข่ายทั้ง 7 สถาบัน โดยที่ประชุมเครือข่ายมีมติมอบหมายให้คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี เป็นเจ้าภาพในการจัดประชุมวิชาการระหว่างวันที่ 10 – 11 มีนาคม 2565 รูปแบบออนไลน์ โดยมีหน้าที่เป็นผู้ประสานงานหลักในการดำเนินงานตลอดจนการจัดทำรายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการเพื่อเผยแพร่แก่ผู้ที่สนใจซึ่งจะเป็นประโยชน์ทางวิชาการด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต่อไป

การจัดงานประชุมวิชาการในครั้งนี้คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี ได้รับความร่วมมือจากผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกและภายในมหาวิทยาลัยในการตรวจอ่านประเมินคุณภาพของผลงานตามลักษณะของ Peer Review ดังนั้นผลงานที่ผ่านการประเมินและได้รับการตีพิมพ์ในรายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการฉบับนี้จึงเป็นงานวิจัยที่มีคุณภาพ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี หวังเป็นอย่างยิ่งว่าการจัดการประชุมวิชาการในครั้งนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เข้าร่วมและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกท่านเพื่อจะได้รับความรู้ไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อตนเองและประเทศชาติต่อไป

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี ขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์และบุคลากรทุกท่านที่มีส่วนร่วมในการจัดงานในครั้งนี้เป็นอย่างดี



(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพงศ์ เครือหงส์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำนำ

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 (The Proceedings of the 7th National Science and Technology Conference : NSCIC 2022) นี้ได้รวบรวมบทความวิจัยทั้งการนำเสนอภาคบรรยายและโปสเตอร์ที่นำเสนอในงานประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565 (The 7th National Science and Technology Conference : NSCIC 2022) ระหว่างวันที่ 10-11 มีนาคม พ.ศ. 2565 รูปแบบออนไลน์ ซึ่งทุกบทความผ่านการพิจารณาจากกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิที่มีความเชี่ยวชาญในแต่ละสาขาวิชาของมหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานีและหน่วยงานภายนอกมหาวิทยาลัย รวมทั้งสิ้น 179 บทความ จาก 6 กลุ่ม ดังนี้

การนำเสนอผลงานในการประชุมวิชาการครั้งนี้มีทั้งภาคบรรยายและภาคโปสเตอร์ ซึ่งคณะผู้จัดทำได้รวบรวมผลงานที่นำเสนอทั้งหมดเป็นบทความวิจัยฉบับเต็มไว้ในรายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการระดับชาติด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7 ประจำปี 2565

แบบบรรยาย 134 บทความ ประกอบด้วย

กลุ่มที่ 1 ด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิทยาศาสตร์ประยุกต์	จำนวน	43	บทความ
กลุ่มที่ 2 ด้านเกษตรศาสตร์ ประมง	จำนวน	6	บทความ
กลุ่มที่ 3 ด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ เทคโนโลยีสารสนเทศ และมัลติมีเดีย	จำนวน	36	บทความ
กลุ่มที่ 4 ด้านสาธารณสุขศาสตร์ วิทยาศาสตร์สุขภาพ	จำนวน	19	บทความ
กลุ่มที่ 5 ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี	จำนวน	20	บทความ
กลุ่มที่ 6 ด้านนวัตกรรมสิ่งประดิษฐ์ เทคโนโลยี และงานสร้างสรรค์	จำนวน	10	บทความ

แบบโปสเตอร์ 45 บทความ ประกอบด้วย

กลุ่มที่ 1 ด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิทยาศาสตร์ประยุกต์	จำนวน	18	บทความ
กลุ่มที่ 2 ด้านเกษตรศาสตร์ ประมง	จำนวน	7	บทความ
กลุ่มที่ 3 ด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ เทคโนโลยีสารสนเทศ และมัลติมีเดีย	จำนวน	6	บทความ
กลุ่มที่ 4 ด้านสาธารณสุขศาสตร์ วิทยาศาสตร์สุขภาพ	จำนวน	10	บทความ
กลุ่มที่ 5 ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี	จำนวน	4	บทความ

คณะกรรมการดำเนินงานจัดประชุมวิชาการนำเสนอผลงานวิจัย ขอขอบคุณผู้บริหารทั้ง 7 สถาบัน ผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่าน ที่ส่งเสริมและสนับสนุนให้การจัดงานครั้งนี้ประสบความสำเร็จเป็นอย่างดี ขอขอบคุณคณะกรรมการดำเนินงานทุกฝ่าย ที่ให้ความร่วมมือและตั้งใจปฏิบัติงานจนประสบความสำเร็จลุล่วงไปด้วยดีรวมถึงขอขอบคุณผู้ส่งผลงานเข้าร่วมนำเสนอหวังเป็นอย่างยิ่งว่าผู้เข้าร่วมทุกท่านจะได้รับประโยชน์จากการประชุมวิชาการในครั้งนี้

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

กำหนดการ
งานประชุมวิชาการระดับชาติ ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7
(The 7th National Science and Technology Conference (NSCIC 2022))

วัน	เวลา	Room I	Room II	Room III	Room IV	Room V	Room VI
10 มีนาคม 2565	08:30 - 09:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน				
	09:00 - 09:30	พิธีเปิด โดย ศ.ดร.วัฒนา รัตนพรหม	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 1 11A1 - 11A8				
	09:30 - 10:30	บรรยายพิเศษโดย ดร.นรา พงษ์พานิช "ทิศทางงานขับเคลื่อนชุมชนท้องถิ่น และสังคมภาคใต้ ด้วยงานวิจัย งานสร้างสรรค์ และนวัตกรรมด้านวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี"	Session Chair: ดร.อุไรรัตน์ รัตนวิจิตร รศ.ดร.สุกัญญา วงศ์ระฆัง				
	11:00 - 12:00	บรรยายพิเศษโดย ดร.สโรจน์ สุธีธรสถกุล "งานวิจัยด้านความหลากหลายทางชีวภาพสู่ การพัฒนาเศรษฐกิจชีวภาพ"					
	12:00 - 13:00			พักรับประทานอาหารกลางวัน			
	12:30 - 13:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน
	13:00 - 16:30	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 2 11B1 - 11B8 Session Chair: ดร.พรทิพย์ วิมลทรง ผศ.จิรนนท์ กล่อมมรา แก้วรักษา	นำเสนอ ด้านสารสนเทศศาสตร์ / ประมง วิทยาศาสตร์สุขภาพ 1 21B1 - 21B10 Session Chair: ผศ.ดร.ศุภณัฐ รัชชทอง ผศ.ดร.สุวิทย์ เคนาเวล	นำเสนอ ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 1 22B1 - 22B13 Session Chair: ดร.ธัญญา ภาคคุณ ผศ.กัญจรัตน์ หนูชุม	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 5 31B1 - 31B8 Session Chair: ดร.สิทธิโชค ทรงสอาด ดร.อรรณกร คัดดา	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 7 32B1 - 32B10 Session Chair: ผศ.ดร.พราดา อินทร์ ดร.อัษฎพร ไชยเจริญ	
				สิ้นสุดการนำเสนอ			
11 มีนาคม 2565	08:30 - 09:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน
	09:00 - 12:00	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 3 11C1 - 11C7 Session Chair: ดร.นิภาภรณ์ มีพันธุ์ ผศ.ดร.อนงญา ไพบูลย์	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์สุขภาพ 2 21C1 - 21C9 Session Chair: ดร.ณิชา หนูพล ผศ.ดร.ศุภณัฐ พงศ์เจริญ	นำเสนอ ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2 22C1 - 22C11 Session Chair: ดร.ศรภาส มากจิต ดร.ณัฐภาส สงศรีจันทร์	นำเสนอ ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 6 31C1 - 31C8 Session Chair: ผศ.กัญจรัตน์ หนูชุม ดร.อรรณกร คัดดา	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 4 32C1 - 32C8 Session Chair: ดร.ณัฐพร ศรีพร ผศ.สุกิจ เอี่ยมสะอาด	
	12:00 - 13:00			พักรับประทานอาหารกลางวัน			
	12:30 - 13:00	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน	ลงทะเบียน
	13:00 - 16:30	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 4 11D1 - 11D12 Session Chair: ผศ.ดร.พัชร์ พงษ์พุ่ม ผศ.เสาวนีย์ ขอบบุญ	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์สุขภาพ 3 21D1 - 21D10 Session Chair: ดร.อมรพันธ์ ประยูรวงศ์ ผศ.ดร.ศุภณัฐ พงษ์พา	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์สุขภาพ 3 22D1 - 22D11 Session Chair: ผศ.ปริญญา น้อยอนไพร ผศ.ศิริวัฒน์ เสงี่ยมโย	นำเสนอ ด้านวิศวกรรมเครื่องกล / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 3 31D1 - 31D10 Session Chair: ดร.พัชร์ ราชเริ่ม ดร.ณัฐภาส คีรยา	นำเสนอ ด้านวิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 5 32D1 - 32D9 Session Chair: ผศ.สุกิจ เอี่ยมสะอาด ผศ.ภาณุอนา ฝ่อทอง	
				สิ้นสุดการนำเสนอ			

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 4			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
3	PSB64190	การพัฒนาเจลล้างมือที่มีส่วนผสมของสารสกัดจากเปลือกผลไม้ในการต้านการเจริญของเชื้อแบคทีเรียก่อโรคบางชนิด	191
4	PSB64215	การยับยั้งเชื้อราโดยใช้สารสกัดหยาบจากใบและเปลือกสับปะรด	202
5	PSB64231	ฤทธิ์ต้านทานแบคทีเรียของสารสกัดหยาบจากหญ้าตีนกา (<i>Eleusine indica</i> (L.) Gaertn.)	210
6	PSB64270	ผลของปัจจัยสิ่งแวดล้อมบางประการต่อแมลงน้ำในลำธารน้ำตกมโนราห์ จังหวัดพัทลุง	218
7	PSB64361	ผลของ 2, 4-D ต่อการชักนำแคลลัสในเมล็ดข้าวเหนียวพัทลุง (<i>Oryza sativa</i> L.)	224
8	PSB64387	การวิเคราะห์ฤทธิ์ต้านอนุมูลอิสระในสารสกัดข้าวสาลีพันธุ์ กข 43 ปากอ และกข 43 ระโนด	230
9	PSB64399	ฤทธิ์ต้านอนุมูลอิสระและฤทธิ์ต้านแบคทีเรียของสารสกัดหยาบจากใบทองพันชั่งต่อเชื้อแบคทีเรียก่อโรคผิวหนัง	236
10	PSB64403	การแยกและจำแนกชนิดราเอนโดไฟต์จากต้นยี่โถปิ้งและต้นโทะ ที่ขึ้นในเหมืองแร่เหล็กเก่า อ.นบพิตำ จ. นครศรีธรรมราช	246
11	PSB64413	ข้อมูลสวนโปรตีนของรกช้างไทยที่ถูกย่อยด้วยเปปซิน	255
12	PSB64422	ฤทธิ์ต้านแบคทีเรียก่อกลิ่นของน้ำมันหอมระเหยจากดอกไม้และการประยุกต์ใช้	261

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 5			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OSM64196	จำนวนคล้ายสมมูลอันดับสามทั่วไป	269
2	OSM64199	การเปรียบเทียบเทคนิคการวิเคราะห์หอนุกรมเวลาสำหรับการพยากรณ์ผู้เข้าใช้บริการในสำนักงานที่ดิน	277
3	OSM64200	การเปรียบเทียบเทคนิคการวิเคราะห์หอนุกรมเวลาสำหรับการพยากรณ์ยอดขายสินค้า	287
4	OSM64204	การเปรียบเทียบเทคนิคการวิเคราะห์หอนุกรมเวลาสำหรับการพยากรณ์ค่าโฆษณาทุกเกิ้ล	296
5	OSM64210	สมการไดโอแฟนไทน์ $4^x - p^y = dz^2$ เมื่อ $p \equiv 2,3 \pmod{4}$ เป็นจำนวนเฉพาะ, $d = 4^k - 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ	305
6	OSM64224	ปัจจัยที่มีความสัมพันธ์ต่อผลิตภัณฑ์มวลรวมตามมูลค่าที่แท้จริงของจังหวัดสุราษฎร์ธานี	310
7	OSM64226	ปัจจัยด้านภูมิอากาศที่มีอิทธิพลต่อจำนวนผู้ป่วยโรคไวรัสโคโรนา 2019 (โควิด-19) ในภาคใต้ของประเทศไทย	317
8	OSM64232	สมบัติบางประการของนัยทั่วไปใหม่ของลำดับคล้าย (p,q) - ฟิโบนาคี	325

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 6			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OSM64233	เอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับ (p,q) -ลูคัสทั่วไป	334
2	OSM64369	ปัจจัยที่มีผลกระทบต่อปริมาณผลผลิตยางพาราแผ่นดิบคุณภาพ 3 ในจังหวัดสุราษฎร์ธานี	342
3	OSM64374	วิธีการใหม่สำหรับการแก้สมการไม่เชิงเส้นโดยพหุนามเทย์เลอร์กำลังสอง	350
4	OSM64379	Comparison of Edge Finding Performance with Gradient and Laplacian Techniques	355
5	OSM64380	Comparison of Edge Finding Performance with Canny and Sobel Techniques	362
6	OSM64386	ตัวแบบคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคโควิด-19 โดยการฉีดวัคซีนเพื่อให้เกิดภูมิคุ้มกันหมู่ : กรณีศึกษาของประเทศไทย	369
7	OSM64388	แบบจำลองคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรควันโรคที่มีผลมาจากคนติดเชื้อในระยะแฝงที่ได้รับการวินิจฉัยและได้รับการรักษา และการติดเชื้อซ้ำ	379
8	OSM64421	การพยากรณ์ผลิตภัณฑ์มวลรวมของจังหวัดสุราษฎร์ธานี	389

ด้านคณิตศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ / วิทยาศาสตร์ประยุกต์ 7			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OSF64230	การพัฒนาเครื่องเติมน้ำส้มสายชูหมักผสมพืชท้องถิ่นในจังหวัดยะลา	399
2	OSF64246	การพัฒนาผลิตภัณฑ์เยลลี่พร้อมดื่มจากน้ำตาลโตนดสดเสริมอินูลิน	409
3	OSF64247	การพัฒนาโน้ตแค้กทดแทนแป้งสาลีด้วยแป้งข้าวกล้องหอมมะลิและใช้สารทดแทนไขมันจากสาหร่ายเกายอ	416
4	OSF64337	การใช้แป้งเมล็ดขนุนเป็นสารให้ความคงตัวในไอศกรีมกะทิเสริมบรอกโคลีผง	426



คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

สมบัติบางประการของนัยทั่วไปใหม่ของลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชี

New Generalized of (p, q) - Fibonacci-Like Sequence and its properties

ซอเฟีย สาและ¹, ไชนับ มะตาร์² และ ศรีณยา เสงส์สวัสดิ์^{3*}

Sofia Salaeh¹, Zainab Mata² and Saranya Hangsawat^{3*}

¹ นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อีเมล: 614254040@parichat.skru.ac.th

² นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อีเมล: 614254041@parichat.skru.ac.th

³ อาจารย์ สังกัดหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อีเมล: saranya.nu@skru.ac.th

* Corresponding author email: saranya.nu@skru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้นิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดของของลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชีและลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชีทั่วไป ซึ่งมีความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_{p,q,n+1} = pS_{p,q,n} + qS_{p,q,n-1}$ และ $T_{p,q,n+1} = pT_{p,q,n} + qT_{p,q,n-1}$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_{p,q,0} = 2q$, $S_{p,q,1} = 2pq$ และ $T_{p,q,0} = mq$, $T_{p,q,1} = mpq$; $m \neq 0$ ตามลำดับ มีการสร้างสูตรบีเนต ศึกษาสมบัติต่าง ๆ โดยใช้สูตรบีเนตที่สร้างขึ้น ทำให้ได้เอกลักษณ์ต่าง ๆ และสูตรผลรวมของพจน์จำนวนคู่ และพจน์จำนวนคี่ของลำดับดังกล่าว

คำสำคัญ : ลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชี และลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชีทั่วไป

Abstract

In this paper, we introduced recurrence relations of (p, q) - Fibonacci-Like sequence and generalized (p, q) - Fibonacci-Like sequence which the recurrence relations $S_{p,q,n+1} = pS_{p,q,n} + qS_{p,q,n-1}$ and $T_{p,q,n+1} = pT_{p,q,n} + qT_{p,q,n-1}$ for $n \in \mathbb{N}$ with initial conditions $S_{p,q,0} = 2q$, $S_{p,q,1} = 2pq$ and $T_{p,q,0} = mq$, $T_{p,q,1} = mpq$; $m \neq 0$ respectively, We study the Binet's formulas and its properties. we derived some identities and sums formulas involving odd and even terms of such sequences.

Keywords : (p, q) - Fibonacci-Like sequence and generalized (p, q) - Fibonacci-Like sequence.

1. บทนำ

ลำดับฟิโบนักชีเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย และได้มีการขยายแนวคิดของลำดับฟิโบนักชีเป็นการศึกษาลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชี และลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชีทั่วไป

มีงานวิจัยจำนวนมากได้ศึกษาลำดับ (p, q) - ฟิโบนักชี ซึ่งงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เช่น (Panwar, Y.K., Rathore, G.P.S., & Chawla, R., 2014) ได้ศึกษาสมบัติบางประการสำหรับผลรวมของจำนวนคู่ และจำนวนคี่ของจำนวน k - ฟิโบนักชี และใช้สูตรบีเนต เพื่อพิสูจน์สมบัติของจำนวน k - ฟิโบนักชี (Suvarnamani, A. & Tatong, M., 2015) ได้ศึกษาลำดับ (p, q) - ฟิโบนักชี โดยใช้สูตรของบีเนตในการแสดงสมบัติบางประการของลำดับ (p, q) - ฟิโบนักชี ทั้งนี้ได้เอกลักษณ์บางประการ สำหรับลำดับ (p, q) - ฟิโบนักชี และยังได้แสดงผลลัพธ์บางส่วนของจำนวน (p, q) - ฟิโบนักชี นอกจากนี้ (Suvarnamani, A., 2018) ได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับคล้าย (p, q) - ฟิโบนักชีทั่วไป สร้างสมบัติ เช่น เอกลักษณ์ของ Catalan

เอกลักษณ์ของ Cassini เอกลักษณ์ของ Simpson เอกลักษณ์ของ d'Ogagne และฟังก์ชันก่อกำเนิด สำหรับจำนวนคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป โดยใช้สูตรของบิเนต ในปีเดียวกัน (กานต์พิชชา แซ่ตั้ง และคณะ, 2561) ได้ศึกษาลำดับพิโบนกชีและลำดับลูคัสทั่วไป โดยเปลี่ยนความสัมพันธ์เวียนเกิดและเงื่อนไขค่าเริ่มต้น และสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิด สูตรบิเนต เพื่อใช้ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ และสมบัติบางประการของลำดับทั่วไป ต่อมา (Tasyurdu, Y., 2019) ได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป ที่เกี่ยวข้องกับลำดับ (p, q) - พิโบนกชี และลำดับ (p, q) - ลูคัส จากนั้นได้บางเอกลักษณ์พื้นฐาน และได้สูตรของบิเนตเพื่อหาพจน์ทั่วไปของลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชี และ (ชวลวิทย์ แสงเจริญ นูรอาศิกิง หะยิจะขอ และศรัณยา เสงส์สวัสดิ์, 2563) ได้ศึกษาจำนวนพิโบนกชีทั่วไป และสร้างเมทริกซ์เพื่อหาผลรวมของลำดับทั่วไปใหม่ของจำนวนพิโบนกชีทั่วไป

ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาเอกลักษณ์ และสมบัติต่าง ๆ ของลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชี และลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป ที่มีความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_{p,q,n+1} = pS_{p,q,n} + qS_{p,q,n-1}$ และ $T_{p,q,n+1} = pT_{p,q,n} + qT_{p,q,n-1}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $S_{p,q,0} = 2q$, $S_{p,q,1} = 2pq$ และ $T_{p,q,0} = mq$, $T_{p,q,1} = mpq$ สำหรับ $m \neq 0$ ตามลำดับ

2. วิธีดำเนินการวิจัย

ในส่วนนี้จะมีการนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชี และลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป

บทนิยาม 1 กำหนดให้ลำดับ (p, q) - พิโบนกชี $\{S_{p,q,n}\}$ และลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป $\{T_{p,q,n}\}$ ที่ถูกนิยามในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$S_{p,q,n+1} = pS_{p,q,n} + qS_{p,q,n-1} \text{ สำหรับ } n \in \mathbb{N}$$

และ

$$T_{p,q,n+1} = pT_{p,q,n} + qT_{p,q,n-1} \text{ สำหรับ } n \in \mathbb{N}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_{p,q,0} = 2q$, $S_{p,q,1} = 2pq$ และ $T_{p,q,0} = mq$, $T_{p,q,1} = mpq$ สำหรับ $m \neq 0$

ลำดับ (p, q) - พิโบนกชี $\{S_{p,q,n}\}$ และลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป $\{T_{p,q,n}\}$ คือ

$$\{S_{p,q,n}\} = \{2q, 2pq, 2p^2q + 2q^2, 2p^3q + 4pq^2, \dots\}$$

และ

$$\{T_{p,q,n}\} = \{mq, mpq, mp^2q + mq^2, mp^3q + 2mpq^2, \dots\}$$

สำหรับ R_1 และ R_2 เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะ $x^2 - px - q = 0$

$$\text{ซึ่ง } R_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ และ } R_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ โดยที่ } R_1 > R_2$$

จะได้ $R_1 + R_2 = p$, $R_1 - R_2 = \sqrt{p^2 + 4q}$ และ $R_1 R_2 = -q$

3. ผลการวิจัย

ในส่วนนี้จะศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิด เอกลักษณะต่าง ๆ ผลรวมของพจน์จำนวนคู่ และพจน์จำนวนคี่ของลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชี และลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป

ทฤษฎีบท 1 สูตรบินเนต (Binet's Formula) ถ้า p และ q เป็นจำนวนเต็มบวก พจน์ที่ n ของลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชี และลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนกชีทั่วไป คือ

$$S_{p,q,n} = 2q \frac{R_1^{n+1} - R_2^{n+1}}{R_1 - R_2} \quad (1)$$

$$T_{p,q,n} = mq \frac{R_1^{n+1} - R_2^{n+1}}{R_1 - R_2} \quad (2)$$

พิสูจน์ จาก $R_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ และ $R_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับ $n = 0$

จะได้
$$2q \frac{R_1^{0+1} - R_2^{0+1}}{R_1 - R_2} = 2q \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_2} = S_{p,q,0}$$

สำหรับ $n = 1$

จะได้
$$2q \frac{R_1^{1+1} - R_2^{1+1}}{R_1 - R_2} = 2q \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1 - R_2} = 2pq = S_{p,q,1}$$

สมมติให้ $P(0), P(1), P(2), \dots, P(r+1)$ เป็นจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned} S_{p,q,r+2} &= S_{p,q,(r+1)+1} \\ &= pS_{p,q,r+1} + qS_{p,q,r} \\ &= p \left(2q \frac{R_1^{r+2} - R_2^{r+2}}{R_1 - R_2} \right) + q \left(2q \frac{R_1^{r+1} - R_2^{r+1}}{R_1 - R_2} \right) \\ &= \frac{2R_1^{r+1}(pqR_1 + q^2) - 2R_2^{r+1}(pqR_2 + q^2)}{R_1 - R_2} \\ &= \frac{2R_1^{r+1}(qR_1^2) - 2R_2^{r+1}(qR_2^2)}{R_1 - R_2} \\ &= 2q \frac{R_1^{(r+1)+2} - R_2^{(r+1)+2}}{R_1 - R_2} \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$S_{p,q,n} = 2q \frac{R_1^{n+1} - R_2^{n+1}}{R_1 - R_2}$$

สำหรับสมการ (2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับคล้าย (p, q) - พิโบนักชี จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{p,q,n} x^n = \frac{2q}{1 - px - qx^2}$$

$$\text{พิสูจน์ ให้ } g(x) = S_{p,q,0} + S_{p,q,1}x + S_{p,q,2}x^2 + \dots + S_{p,q,n}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} S_{p,q,n}x^n \quad (3)$$

$$pg(x)x = pS_{p,q,0}x + pS_{p,q,1}x^2 + pS_{p,q,2}x^3 + \dots + pS_{p,q,n}x^{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} pS_{p,q,n}x^{n+1} \quad (4)$$

$$qg(x)x^2 = qS_{p,q,0}x^2 + qS_{p,q,1}x^3 + qS_{p,q,2}x^4 + \dots + qS_{p,q,n}x^{n+2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} qS_{p,q,n}x^{n+2} \quad (5)$$

นำ (3) - (4) - (5) จะได้

$$\begin{aligned} g(x)(1 - px - qx^2) &= S_{p,q,0} + S_{p,q,1}x + S_{p,q,2}x^2 - pS_{p,q,0}x - pS_{p,q,1}x^2 - pS_{p,q,2}x^3 \\ &\quad - qS_{p,q,0}x^2 - qS_{p,q,1}x^3 - qS_{p,q,2}x^4 + \dots + S_{p,q,n+1}x^{n+1} + \dots \\ &= S_{p,q,0} - pS_{p,q,0}x + S_{p,q,1}x + \sum_{n=2}^{\infty} (S_{p,q,n+1} - pS_{p,q,n} - pS_{p,q,n-1})x^{n+1} \quad (6) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $S_{p,q,n+1} = pS_{p,q,n} + qS_{p,q,n-1}$; $n \geq 1$ ซึ่ง $S_{p,q,0} = 2q$, $S_{p,q,1} = 2pq$ แทนในสมการ (6) จะได้

$$= 2q - p(2q)x + (2pq)x + \sum_{n=2}^{\infty} (S_{p,q,n+1} - pS_{p,q,n} - pS_{p,q,n-1})x^{n+1}$$

$$g(x)(1 - px - qx^2) = 2q - 2pqx + 2pqx + 0$$

$$g(x) = \frac{2q}{(1 - px - qx^2)}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=0}^{\infty} S_{p,q,n}x^n = \frac{2q}{1 - px - qx^2}$$

ทฤษฎีบท 3 (เอกลักษณ์ Vajda) ให้ p, q, m, n และ t เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$S_{p,q,m+n}S_{p,q,m+t} - S_{p,q,m}S_{p,q,m+n+t} = \frac{2q^2(q^{m+n+1} + p^{-n+t} - q^{m+1}p^{n+t})}{p^2 + 4q}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 สมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &S_{p,q,m+n}S_{p,q,m+t} - S_{p,q,m}S_{p,q,m+n+t} \\ &= \left(2q \frac{R_1^{m+n+1} - R_2^{m+n+1}}{R_1 - R_2} \right) \left(2q \frac{R_1^{m+t+1} - R_2^{m+t+1}}{R_1 - R_2} \right) \\ &\quad - \left(2q \frac{R_1^{m+1} - R_2^{m+1}}{R_1 - R_2} \right) \left(2q \frac{R_1^{m+n+t+1} - R_2^{m+n+t+1}}{R_1 - R_2} \right) \\ &= \left(\frac{2q}{R_1 - R_2} \right)^2 \left(-R_1^{m+n+1}R_2^{m+t+1} - R_1^{m+t+1}R_2^{m+n+1} + R_1^{m+1}R_2^{m+n+t+1} + R_1^{m+n+t+1}R_2^{m+1} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2q}{R_1 - R_2} \right)^2 \left[- (R_1 R_2)^{m+n+1} (R_1^{-n+t} + R_2^{-n+t}) + (R_1 R_2)^{m+1} (R_2^{n+t} + R_1^{n+t}) \right]$$

$$= \frac{4q^2 (q^{m+n+1} p^{-n+t} - q^{m+1} p^{n+t})}{p^2 + 4q}$$

ดังนั้น $S_{p,q,m+n} S_{p,q,m+t} - S_{p,q,m} S_{p,q,m+n+t} = \frac{2q^2 (q^{m+n+1} + p^{-n+t} - q^{m+1} p^{n+t})}{p^2 + 4q}$

ทฤษฎีบท 4 (เอกลักษณ์ Catalan) ให้ p, q, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $m \geq n$ แล้ว

$$S_{p,q,m-n} S_{p,q,m+n} - S_{p,q,m}^2 = q^{m-n+1} S_{p,q,n-1}$$

ในการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 4 สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3 โดยใช้สูตรบินต์จากสมการ (1)

ทฤษฎีบท 5 ผลรวมของ n พจน์แรกของลำดับคล้าย (p, q) - פיבונัคซี จะได้

$$\sum_{i=0}^n S_{p,q,i} = \frac{2q - S_{p,q,n+1} + p S_{p,q,n}}{1 - p - q}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 สมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n S_{p,q,i} &= \sum_{i=0}^n \left(2q \frac{R_1^{i+1} - R_2^{i+1}}{R_1 - R_2} \right) \\ &= \frac{2q}{R_1 - R_2} \left[R_1 \left(\sum_{i=0}^n R_1^i \right) - R_2 \left(\sum_{i=0}^n R_2^i \right) \right] \\ &= \frac{2q}{R_1 - R_2} \left[R_1 \left(\frac{1 - R_1^{n+1}}{1 - R_1} \right) - R_2 \left(\frac{1 - R_2^{n+1}}{1 - R_2} \right) \right] \\ &= \frac{2q}{(1 - R_1)(1 - R_2)} \left[\frac{R_1 - R_2 - R_1^{n+2} + R_2^{n+2} + R_1^{n+2} R_2 - R_1 R_2^{n+2}}{(R_1 - R_2)} \right] \\ &= \frac{2q}{(1 - R_1)(1 - R_2)} \left[\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_2} \right) - \left(\frac{R_1^{n+2} - R_2^{n+2}}{R_1 - R_2} \right) + (R_1 R_2) \left(\frac{R_1^{n+1} - R_2^{n+1}}{R_1 - R_2} \right) \right] \\ &= \frac{2q - S_{p,q,n+1} + p S_{p,q,n}}{1 - R_2 - R_1 + R_1 R_2} \\ &= \frac{2q - S_{p,q,n+1} + p S_{p,q,n}}{1 - p - q} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{i=0}^n S_{p,q,i} = \frac{2q - S_{p,q,n+1} + pS_{p,q,n}}{1-p-q}$$

ทฤษฎีบท 6 ผลรวมของ n พจน์แรกของจำนวนคู่ของลำดับคล้าย (p, q) - פיבונัคซี จะได้

$$\sum_{i=0}^n S_{p,q,2i} = \frac{2q - S_{p,q,2n+2} - qS_{p,q,2n+1}}{1-p-q}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 สมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n S_{p,q,2i} &= \sum_{i=0}^n \left(2q \frac{R_1^{2i+1} - R_2^{2i+1}}{R_1 - R_2} \right) \\ &= \frac{2q}{R_1 - R_2} \left(R_1 \sum_{i=0}^n R_1^{2(n+1)-2i} - R_2 \sum_{i=0}^n R_2^{2(n+1)-2i} \right) \\ &= \frac{2q}{R_1 - R_2} \left[R_1 \left(\frac{1 - R_1^{2(n+1)+2}}{1 - R_1^2} \right) - R_2 \left(\frac{1 - R_2^{2(n+1)+2}}{1 - R_2^2} \right) \right] \\ &= \frac{2q}{(1 - R_1)(1 - R_2)} \left[1 - \left(\frac{R_1^{2n+3} - R_2^{2n+3}}{R_1 - R_2} \right) + (R_1 R_2) \left(\frac{R_1^{2n+2} - R_2^{2n+2}}{R_1 - R_2} \right) \right] \\ &= \frac{2q}{1 - R_2 - R_1 + R_1 R_2} \left[1 - \left(\frac{R_1^{2n+3} - R_2^{2n+3}}{R_1 - R_2} \right) - q \left(\frac{R_1^{2n+2} - R_2^{2n+2}}{R_1 - R_2} \right) \right] \\ &= \frac{2q}{1 - p - q} \left[1 - \left(\frac{R_1^{2n+3} - R_2^{2n+3}}{R_1 - R_2} \right) - q \left(\frac{R_1^{2n+2} - R_2^{2n+2}}{R_1 - R_2} \right) \right] \\ &= \frac{2q - S_{p,q,2n+2} - qS_{p,q,2n+1}}{1 - p - q} \\ \text{ดังนั้น } \sum_{i=0}^n S_{p,q,2i} &= \frac{2q - S_{p,q,2n+2} - qS_{p,q,2n+1}}{1 - p - q} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7 ผลรวมของ n พจน์แรกของจำนวนคี่ของลำดับคล้าย (p, q) - פיבונัคซี จะได้

$$\sum_{i=0}^n S_{p,q,2i+1} = \frac{2q(\sqrt{p^2 + 4q} + q) - S_{p,q,2n+3} - qS_{p,q,2n+2}}{1 - p - q}$$

ในการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 7 สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 6 โดยใช้สูตรบีเนตจากสมการ (1)

ทฤษฎีบท 8 (เอกลักษณ์ Cassini) ให้ p, q และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$T_{p,q,n+1}T_{p,q,n-1} - T_{p,q,n}^2 = m^2 q^{n+2}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 สมการ (2) จะได้ว่า

$$T_{p,q,n+1}T_{p,q,n-1} - T_{p,q,n}^2 = \left(mq \frac{R_1^{n+2} - R_2^{n+2}}{R_1 - R_2} \right) \left(mq \frac{R_1^n - R_2^n}{R_1 - R_2} \right) - \left(mq \frac{R_1^{n+1} - R_2^{n+1}}{R_1 - R_2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{mq}{R_1 - R_2} \right)^2 \left(-R_1^{n+2} R_2^n - R_1^n R_2^{n+2} + 2R_1^{n+1} R_2^{n+1} \right) \\ &= \frac{(mq)^2 (-R_1 R_2)^n}{(R_1 - R_2)^2} (R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2) \\ &= m^2 q^{n+2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $T_{p,q,n+1} T_{p,q,n-1} - T_{p,q,n}^2 = m^2 q^{n+2}$

ทฤษฎีบท 9 ให้ p, q และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $n \geq 2$ แล้ว

$$T_{p,q,1} T_{p,q,n+1} - T_{p,q,2} T_{p,q,n} = mq(-q)^{n+1} T_{p,q,-n}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 สมการ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &T_{p,q,1} T_{p,q,n+1} - T_{p,q,2} T_{p,q,n} \\ &= \left(mq \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1 - R_2} \right) \left(mq \frac{R_1^{n+2} - R_2^{n+2}}{R_1 - R_2} \right) - \left(mq \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} \right) \left(mq \frac{R_1^{n+1} - R_2^{n+1}}{R_1 - R_2} \right) \\ &= \left(\frac{mq}{R_1 - R_2} \right)^2 \left(-R_1^2 R_2^{n+2} - R_1^{n+2} R_2^2 + R_1^3 R_2^{n+1} + R_1^{n+1} R_2^3 \right) \\ &= \left(\frac{mq}{R_1 - R_2} \right)^2 \left[(R_1^2 R_2^{n+1})(R_1 - R_2) - (R_1^{n+1} R_2^2)(R_1 - R_2) \right] \\ &= \frac{(mq)^2 (R_1 R_2)^{n+1}}{(R_1 - R_2)} (R_1^{-n+1} - R_2^{-n+1}) \\ &= mq(-q)^{n+1} T_{p,q,-n} \end{aligned}$$

ดังนั้น $T_{p,q,1} T_{p,q,n+1} - T_{p,q,2} T_{p,q,n} = mq(-q)^{n+1} T_{p,q,-n}$

ทฤษฎีบท 10 ให้ p, q และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $n \geq 2$ แล้ว

$$T_{p,q,m} T_{p,q,n+1} + q T_{p,q,m-1} T_{p,q,n} = mq T_{p,q,m+n+1}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 สมการ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &T_{p,q,m} T_{p,q,n+1} + q T_{p,q,m-1} T_{p,q,n} \\ &= \left(mq \frac{R_1^{m+1} - R_2^{m+1}}{R_1 - R_2} \right) \left(mq \frac{R_1^{n+2} - R_2^{n+2}}{R_1 - R_2} \right) \\ &\quad + (-R_1 R_2) \left(mq \frac{R_1^m - R_2^m}{R_1 - R_2} \right) \left(mq \frac{R_1^{n+1} - R_2^{n+1}}{R_1 - R_2} \right) \\ &= \left(\frac{mq}{R_1 - R_2} \right)^2 \left(R_1^{m+n+3} + R_2^{m+n+3} - R_1^{m+n+2} R_2 - R_1 R_2^{m+n+2} \right) \\ &= \left(\frac{mq}{R_1 - R_2} \right)^2 \left[R_1^{m+n+2} (R_1 - R_2) - R_2^{m+n+2} (R_1 - R_2) \right] \end{aligned}$$

$$= mq \left(mq \frac{R_1^{m+n+2} - R_2^{m+n+2}}{R_1 - R_2} \right)$$

$$= mq T_{p,q,m+n+1}$$

ดังนั้น $T_{p,q,m} T_{p,q,n+1} + q T_{p,q,m-1} T_{p,q,n} = mq T_{p,q,m+n+1}$

ทฤษฎีบท 11 ให้ p, q, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $m \geq n$ แล้ว

$$T_{p,q,m}^2 - T_{p,q,m-n} T_{p,q,m+n} = (-q)^{m-n+1} T_{p,q,n-1}^2$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1 สมการ (2) จะได้

$$T_{p,q,m}^2 - T_{p,q,m-n} T_{p,q,m+n}$$

$$= \left(mq \frac{R_1^{m+1} - R_2^{m+1}}{R_1 - R_2} \right)^2 - \left(mq \frac{R_1^{m-n+1} - R_2^{m-n+1}}{R_1 - R_2} \right) \left(mq \frac{R_1^{m+n+1} - R_2^{m+n+1}}{R_1 - R_2} \right)$$

$$= \left(\frac{mq}{R_1 - R_2} \right)^2 \left(-2R_1^{m+1} R_2^{m+1} + R_1^{m-n+1} R_2^{m+n+1} + R_1^{m+n+1} R_2^{m-n+1} \right)$$

$$= \left(\frac{mq}{R_1 - R_2} \right)^2 (R_1 R_2)^{m-n+1} (R_1^{2n} - 2R_1^n R_2^n + R_2^{2n})$$

$$= (-q)^{m-n+1} \left(mq \frac{R_1^n - R_2^n}{R_1 - R_2} \right)^2$$

$$= (-q)^{m-n+1} T_{p,q,n-1}^2$$

ดังนั้น $T_{p,q,m}^2 - T_{p,q,m-n} T_{p,q,m+n} = (-q)^{m-n+1} T_{p,q,n-1}^2$

4. อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิด และได้กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชี และลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชีทั่วไปให้แตกต่างจากเดิม นั่นคือ นิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_{p,q,n+1} = pS_{p,q,n} + qS_{p,q,n-1}$ และ $T_{p,q,n+1} = pT_{p,q,n} + qT_{p,q,n-1}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $S_{p,q,0} = 2q$, $S_{p,q,1} = 2pq$ และ $T_{p,q,0} = mq$, $T_{p,q,1} = mpq$; $m \neq 0$ ตามลำดับ โดยใช้สูตรบินต์ในการหาฟังก์ชันก่อกำเนิด ได้สูตรผลรวม เอกลักษณะและสมบัติต่าง ๆ เช่น เอกลักษณะของ Catalan เอกลักษณะของ Cassini เอกลักษณะของ Vajda ผลรวมของพจน์จำนวนคู่ และพจน์จำนวนคี่ของลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชี และลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชีทั่วไป ในการทำวิจัยครั้งต่อไปสามารถขยายแนวคิดของสมบัติบางประการของนัยทั่วไปใหม่ของลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชี โดยการเปลี่ยนความสัมพันธ์เวียนเกิด หรือเงื่อนไขค่าเริ่มต้น และศึกษาความสัมพันธ์ เอกลักษณะ หรือสมบัติต่าง ๆ ของลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชี และลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชีทั่วไป หรือนำไปสร้างผลคูณของลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชี และลำดับคล้าย (p, q) -ฟีโบนัชชีทั่วไป

5. เอกสารอ้างอิง

- กานต์พิชชา แซ่ตั้ง และคณะ. (2561). เอกลักษณ์สำหรับนับทั่วไปใหม่ของลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส. *วารสารวิทยาลัยศาสตร์บูรพา*, 23(3), 1705-1716.
- ชวลิตวิทย์ แสงเจริญ นูรอาศีกิ่ง หะยีเจ๊ะขอ และศรัณยา เฮงสวัสดิ์. (2563). *ผลรวมสำหรับนับทั่วไปใหม่*. งานประชุมวิชาการระดับชาติ ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 5. 6-7 กุมภาพันธ์ 2563. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย จังหวัดนครศรีธรรมราช: 1-8.
- Panwar, Y.K., Rathore, G.P.S., & Chawla, R. (2014). On sums of odd and even terms of the K-Fibonacci Number. *Global Journal Mathematical Analysis*, 2(3), 115-119.
- Suvarnamani, A. & Tatong, M. (2015). Some properties of (p,q)-Fibonacci Number. *Science and Technology RMUTT Journal*, 5(2), 17-21.
- Suvarnamani, A. (2018). Some properties of the generalized (p,q)-Fibonacci-Like Number. *MATEC Web of Conference*, 189, 1-6.
- Tasyurdu, Y. (2019). Genrralized (p,q)-Fibonacci-Like Sequences and Their Properties. *Journal of Mathematics Research*, 11(6), 43-52.