



รายงานสืบเนื่อง
งานประชุมวิชาการระดับชาติ
ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
เครือข่ายสถาบันอุดมศึกษาภาคใต้ ครั้งที่ 7

วันที่ 10-11 มีนาคม พ.ศ. 2565
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี

ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี 1			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OEM64251	การจัดการเรียนรู้โดยใช้บทเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนและทศนิยม ด้วยรูปแบบการจัดการเรียนรู้ SSCS ร่วมกับเทคนิคเพื่อนคู่คิด สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5	875
2	OEM64255	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องปริพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้เครื่องมือพลวัตทางคณิตศาสตร์ (GeoGebra) บน Microsoft Sway ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภายใต้การเรียนรู้บนฐานชีวิตวิถีใหม่ (New Normal)	884
3	OEM64256	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ โดยใช้หนังสืออิเล็กทรอนิกส์ ร่วมกับการเรียนรู้แบบความเป็นจริงเสริม (Augmented Reality) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภายใต้การเรียนรู้บนฐานชีวิตวิถีใหม่ (New Normal)	895
4	OEM64261	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องมุม โดยใช้สื่อการเรียนรู้แบบลงมือปฏิบัติ All in One ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4	906
5	OEM64290	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ตามแนวคิดทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ร่วมกับการจัดการเรียนรู้แบบห้องเรียนกลับด้าน (Flipped Classroom) เรื่อง การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	915
6	OEM64292	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม โดยจัดการเรียนการสอนด้วยชุดสื่อการดทฤษฎีบทวงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	928
7	OEM64293	บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน CAI ด้วยโปรแกรม Power point ร่วมด้วยกับการจัดการเรียนรู้แบบเน้นประสบการณ์ (Experiential Learning Theory: ELT) เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนนราธิวาส	942
8	OEM64304	การจัดการเรียนรู้ด้วยหนังสือมีชีวิตเพื่อส่งเสริมทักษะการคิดเชิงคำนวณ ภายใต้สถานการณ์การแพร่ระบาด COVID-19 สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา	956
9	OEM64308	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนนับไม่เกิน 1,000 ที่เน้นกิจกรรมปฏิบัติ โดยใช้สื่อกระดานแม่เหล็กเพื่อการทดียม สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนบ้านโคกตา	964
10	OEM64449	ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายลูคัส	974
11	PEM64259	การศึกษาค้นคว้าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนออนไลน์ Google Site เรื่อง เลขยกกำลัง	980
12	PEM64291	การศึกษาค้นคว้าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ โดยใช้สื่อประสมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	988
13	PEM64297	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องหลักการบวกและหลักการคูณ โดยใช้สื่อกระดานจำลองร่วมกับการใช้รูปแบบ SSCS ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	1000

ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี 2			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
1	OES64296	การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคิดสร้างสรรค์ทางวิทยาศาสตร์ของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ด้วยการจัดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ร่วมกับแนวคิดสะเต็มศึกษา	1011
2	OES64319	ผลการใช้ชุดกิจกรรมเพื่อพัฒนาทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องตัวกลางของแสง ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเทศบาล ๑ (ถนนภูผากิติ) จังหวัดนราธิวาส	1023
3	OES64365	การศึกษาค้นคว้าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในรายวิชาดาราศาสตร์ โลก และอวกาศ เรื่อง การเกิดเมฆ ด้วยบทเรียนเอ็มเลิร์นนิ่ง (M-Learning) บนโทรศัพท์มือถือร่วมกับเทคนิคการสอนแบบทำนาย-สังเกต-อภิปราย (POE) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนธรรมวิทยามูลนิธิ จังหวัดยะลา	1033
4	OEC64213	การจัดการเรียนรู้ด้วยการเขียนโปรแกรมแบบจินตภาพ เพื่อส่งเสริมทักษะโค้ดดิ้ง ภายใต้สถานการณ์การแพร่ระบาด COVID-19 สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา	1041
5	OEC64239	สื่อการเรียนการสอนเรื่อง พืชสมุนไพร	1050

ด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี 2			
ลำดับที่	รหัสบทความ	ชื่องานวิจัย	หน้า
6	OEC64306	ผลการใช้ชุดกิจกรรมอันปลั๊กโค้ดดิ้ง เรื่อง ไปเรียนยุค COVID-19 เพื่อส่งเสริมการแก้ปัญหา วิชา เทคโนโลยี (วิทยาการคำนวณ) ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1	1059
7	OEC64307	การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 วิชา เทคโนโลยี (วิทยาการคำนวณ) เรื่อง การเขียนโปรแกรมภาษาไพทอน โดยใช้แอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้กับการสอนแบบปกติ	1071
8	OEC64320	การพัฒนาแอปพลิเคชันทางการศึกษาเพื่อส่งเสริมทักษะการรู้ดิจิทัลสำหรับนักเรียนระดับ ประถมศึกษาปีที่ 1	1084
9	OEC64354	การใช้รูปแบบการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ (5E) ร่วมกับบทเรียนการดูออนไลน์ใน Google Sites เรื่องแบบจำลองอะตอม เพื่อส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 4 จังหวัดยะลา ในช่วงสถานการณ์โควิด-19	1092
10	OEC64391	การส่งเสริมการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ด้วยบทเรียน ออนไลน์ผ่านโปรแกรม Glide app เรื่อง ระบบนิเวศและประชากร ร่วมกับการจัดการเรียนรู้ ตามแนวคอนสตรัคติวิสต์ ในช่วงสถานการณ์โควิด-19	1100
11	PES64287	การพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เรื่อง ตัวกลางของแสง เพื่อส่งเสริมผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนและทักษะการสังเกตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ท่ามกลางสถานการณ์ โควิด-19	1109

ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายลูคัส

Relations among Fibonacci, Lucas and Lucas-Like Sequences

พงษ์เพชร เพ็ชรสงค์¹, กัสมา งะสมัน², อติศักดิ์ เต็มเพชรหนอง³, ดร.ภัทราวรรณ สิงควานนท์^{4*}

Pongphet Phetsong¹, Kasma Ngasaman², Adisak Denphetnong³, Pattarawan Singgawananda^{4*}

¹ นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา 90000

² นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา 90000

³ อาจารย์ หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา 90000

⁴ อาจารย์ หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ สงขลา 90000

* Corresponding author email: pattarawan.pe@sku.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายลูคัส ซึ่งนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $S_0 = 2m$ และ $S_1 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม นอกจากนี้ได้ศึกษาสูตรบินेटของลำดับดังกล่าว ในงานวิจัยนี้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของจำนวนคล้ายลูคัส ดังนี้ $S_k S_{n+1} + S_{k+1} S_n = m[2S_{k+n+1} + (-1)^n S_{k-n}]$, $0 \leq n \leq k$, $S_k S_n + S_{k-r} S_{n+r} = 2m S_{k+n} + (-1)^n S_r S_{k-r-n}$ และได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูคัส และจำนวนคล้ายลูคัส คือ $mL_n = S_{n+1} - S_{n-1}$, $S_{n+1} = m[L_n + L_{n-1}]$ และได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนัชชี และจำนวนคล้ายลูคัส คือ $S_n = m(F_{n+1} + F_{n-1})$ ยิ่งไปกว่านั้นยังได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนัชชี จำนวนลูคัส และจำนวนคล้ายลูคัส คือ $S_{n+1} = \frac{m}{2}[5F_n + L_n]$

คำสำคัญ: สูตรบินेट ลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคัส และลำดับคล้ายลูคัส

Abstract

In this paper, we investigated about Fibonacci, Lucas and Lucas-Like Sequence which are defined by the recurrence relations $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ for positive integer $n \geq 2$ with initial conditions, $S_0 = 2m$ and $S_1 = m$ where m is an integer respectively. Moreover, we examined about the Binet's formula. In this paper, We obtain the relationships on Lucas-Like number $S_k S_{n+1} + S_{k+1} S_n = m[2S_{k+n+1} + (-1)^n S_{k-n}]$, $0 \leq n \leq k$, the relationship between Lucas and Lucas-Like numbers $mL_n = S_{n+1} - S_{n-1}$, $S_{n+1} = m[L_n + L_{n-1}]$ and the relationship between Fibonacci and Lucas-Like numbers $S_n = m(F_{n+1} + F_{n-1})$. Moreover, we show the relationship among Fibonacci, Lucas, and Lucas-Like numbers $S_{n+1} = \frac{m}{2}[5F_n + L_n]$

Keywords: Binet's formulas, Fibonacci number, Lucas number, Lucas-Like number.

1. บทนำ

ในปี Koshy (2001) ได้ศึกษาจำนวนฟีโบนัชชี และได้ศึกษาสูตรบีเนตสำหรับจำนวนฟีโบนัชชี ดังนี้

บทนิยาม 1.1 จำนวนฟีโบนัชชี F_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$

จากบทนิยาม 1.1 นี้จะได้ลำดับฟีโบนัชชี คือ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

สูตรบีเนต (Binet's formula) สำหรับจำนวนฟีโบนัชชี F_n คือ

$$F_n = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^n - \beta^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ในปี Koshy (2001) ได้ศึกษาจำนวนลูคัส และสูตรบีเนตสำหรับจำนวนลูคัส ดังนี้

บทนิยาม 1.2 จำนวนลูคัส L_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$

จากบทนิยาม 1.2 นี้จะได้ลำดับลูคัส คือ 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, ...

สูตรบีเนต (Binet's formula) สำหรับจำนวนลูคัส L_n ดังนิยามต่อไปนี้

$$L_n = (\alpha^n + \beta^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ในปี Yogesh et al. (2015) ได้กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับคล้ายฟีโบนัชชีไว้ คือ

บทนิยาม 1.3 จำนวนคล้ายฟีโบนัชชี B_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$B_n = B_{n-1} + B_{n+2}, \quad n \geq 2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $B_0 = s$ และ $B_1 = s+1$ เมื่อ s เป็นจำนวนเต็ม

ในปี Wani et al. (2016) ได้กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับคล้ายฟีโบนัชชีไว้ คือ

บทนิยาม 1.4 จำนวนคล้ายฟีโบนัชชี T_n นิยามโดย

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $T_0 = m$ และ $T_1 = m$

จากบทนิยาม 1.4 นี้จะได้ลำดับคล้ายฟีโบนัชชี คือ $m, m, 2m, 3m, 5m, 8m, 13m, 21m, 34m, 55m, \dots$

สูตรบินต์ (Binet's formula) สำหรับจำนวนคล้ายฟีโบนัคชี T_n ดังนิยามต่อไปนี้

$$T_n = m \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{m}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้รับแรงบันดาลใจจากจำนวนคล้ายโบนัคชีในบทนิยาม 1.4 โดยผู้วิจัยได้นิยามจำนวนคล้ายลูคัสขึ้นมาใหม่ใน ซึ่งก็คือ $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, $n = 2, 3, 4, \dots$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $S_0 = 2m$ และ $S_1 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม ทำนองเดียวกันกับจำนวนคล้ายฟีโบนัคชี และศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนคล้ายลูคัส

2. วิธีดำเนินการวิจัย

- 2.1 นิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับคล้ายลูคัส และศึกษาสูตรบินต์ของลำดับดังกล่าว และศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของลำดับคล้ายลูคัสที่นิยามขึ้นมาใหม่
- 2.2 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนคล้ายลูคัสที่นิยามขึ้นมาใหม่ กับจำนวนลูคัสเดิม
- 2.3 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนคล้ายลูคัส และจำนวนฟีโบนัคชี
- 2.4 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสามจำนวน คือ จำนวนฟีโบนัคชี จำนวนลูคัส และจำนวนคล้ายลูคัส

3. ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นิยามลำดับคล้ายลูคัส (Lucas-Like) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S_n ดังนี้
บทนิยาม 3.1 จำนวนคล้ายลูคัส S_n นิยามโดย

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $S_0 = 2m$ และ $S_1 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

จากบทนิยาม 3.1 นี้จะได้ลำดับคล้ายลูคัส คือ $2m, m, 3m, 4m, 11m, 18m, 29m, 47m, 76m, \dots$

สูตรบินต์ (Binet's formula) สำหรับจำนวนคล้ายลูคัส S_n ดังนิยามต่อไปนี้

$$S_n = m(\alpha^n + \beta^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ จะได้ $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, $\alpha\beta = -1$

ข้อสังเกต

จะเห็นว่าในกรณีที่ $m=1$ สามารถขยายผลลัพธ์ไปสู่ลำดับคล้ายลูคัสและลำดับลูคัส

ในทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 จะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของจำนวนคล้ายลูคัส

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ m เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$S_k S_{n+1} + S_{k+1} S_n = m[2S_{k+n+1} + (-1)^n S_{k-n}], \quad 0 \leq n \leq k \quad 3.1$$

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 3.1 พิจารณา

$$S_k S_{n+1} + S_{k+1} S_n = m(\alpha^k + \beta^k)m(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + m(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})m(\alpha^n + \beta^n)$$

$$\begin{aligned}
 &= m^2 \left[(\alpha^k + \beta^k)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha^n + \beta^n) \right] \\
 &= m^2 \left[\alpha^{k+n+1} + \alpha^k \beta^{n+1} + \beta^k \alpha^{n+1} + \beta^{k+n+1} + \alpha^{k+1} \beta^n + \beta^{k+1} \alpha^n + \beta^{k+n+1} \right] \\
 &= m^2 \left[2\alpha^{k+n+1} + 2\beta^{k+n+1} + \alpha^k \beta^{n+1} + \alpha^{k+1} \beta^n + \beta^k \alpha^{n+1} + \beta^{k+1} \alpha^n \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n+1} + \beta^{k+n+1}) + \alpha^k \beta^n (\beta + \alpha) + \beta^k \alpha^n (\alpha + \beta) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n+1} + \beta^{k+n+1}) + \alpha^k \beta^n + \beta^k \alpha^n \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n+1} + \beta^{k+n+1}) + \alpha^k \beta^n \alpha^{-n} + \beta^k \alpha^n \beta^{-n} \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n+1} + \beta^{k+n+1}) + \alpha^k \alpha^{-n} (\alpha\beta)^n + \beta^k \beta^{-n} (\alpha\beta)^n \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n+1} + \beta^{k+n+1}) + \alpha^{k-n} (-1)^n + \beta^{k-n} (-1)^n \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n+1} + \beta^{k+n+1}) + (-1)^n (\alpha^{k-n} + \beta^{k-n}) \right] \\
 &= m \left[2S_{k+n+1} + (-1)^n S_{k-n} \right]
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$S_k S_n + S_{k-r} S_{n+r} = 2m S_{k+n} + (-1)^n S_r S_{k-r-n}, \quad k \geq r+n \quad 3.2$$

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 3.1 พิจารณา

$$\begin{aligned}
 S_k S_n + S_{k-r} S_{n+r} &= m(\alpha^k + \beta^k)m(\alpha^n + \beta^n) + m(\alpha^{k-r} + \beta^{k-r})m(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) \\
 &= m^2 \left[(\alpha^k + \beta^k)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{k-r} + \beta^{k-r})(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) \right] \\
 &= m^2 \left[\alpha^{k+n} + \alpha^k \beta^n + \beta^k \alpha^n + \beta^{k+n} + \alpha^{k+n} + \alpha^{k-r} \beta^{n+r} + \beta^{k-r} \alpha^{n+r} + \beta^{k+n} \right] \\
 &= m^2 \left[2\alpha^{k+n} + 2\beta^{k+n} + \alpha^k \beta^n + \alpha^{k-r} \beta^{n+r} + \beta^k \alpha^n + \beta^{k-r} \alpha^{n+r} \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + \alpha^k \beta^n \left(1 + \frac{\beta^r}{\alpha^r} \right) + \beta^k \alpha^n \left(1 + \frac{\alpha^r}{\beta^r} \right) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + \alpha^k \beta^n \left(\frac{\alpha^r + \beta^r}{\alpha^r} \right) + \beta^k \alpha^n \left(\frac{\beta^r + \alpha^r}{\beta^r} \right) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + \alpha^{k-r} \beta^n (\alpha^r + \beta^r) + \beta^{k-r} \alpha^n (\beta^r + \alpha^r) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + (\alpha^r + \beta^r)(\alpha^{k-r} \beta^n + \beta^{k-r} \alpha^n) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + (\alpha^r + \beta^r)(\alpha^{k-r} \beta^n \alpha^{-n} + \beta^{k-r} \alpha^n \beta^{-n}) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + (\alpha^r + \beta^r)(\alpha^{k-r} \alpha^{-n} (\alpha\beta)^n + \beta^{k-r} \beta^{-n} (\alpha\beta)^n) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + (\alpha^r + \beta^r)(\alpha^{k-r-n} (-1)^n + \beta^{k-r-n} (-1)^n) \right] \\
 &= m^2 \left[2(\alpha^{k+n} + \beta^{k+n}) + (\alpha^r + \beta^r)(-1)^n (\alpha^{k-r-n} + \beta^{k-r-n}) \right] \\
 &= 2m S_{k+n} + (-1)^n S_r S_{k-r-n}
 \end{aligned}$$

ในทฤษฎีบทต่อไป จะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างของจำนวนลูคัส และจำนวนคล้ายลูคัส

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$mL_n = S_{n+1} - S_{n-1} \quad 3.3$$

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 1.2 และบทนิยาม 3.1 จะได้

$$\begin{aligned} mL_n &= m[\alpha^n + \beta^n] \\ &= m[\alpha^{n-1}(\alpha^2 - 1) + \beta^{n-1}(\beta^2 - 1)] \\ &= m[\alpha^{n-1} - \alpha^{n-1} + \beta^{n+1} - \beta^{n-1}] \\ &= m[(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})] \\ &= m(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - m(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\ &= S_{n+1} - S_{n-1} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$S_{n+1} = m[L_n + L_{n-1}]$$

3.4

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 1.2 และบทนิยาม 3.1 จะได้

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= m[\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}] \\ &= m[\alpha^{n-1}(\alpha^2) + \beta^{n-1}(\beta^2)] \\ &= m[\alpha^{n-1}(\alpha + 1) + \beta^{n-1}(\beta + 1)] \\ &= m[\alpha^n + \alpha^{n-1} + \beta^n + \beta^{n-1}] \\ &= m[(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})] \\ &= m[L_n + L_{n-1}] \end{aligned}$$

ในทฤษฎีบทต่อไป จะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างของจำนวนฟีโบนัชชี และจำนวนคล้ายลูคัส

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$S_n = m(F_{n+1} + F_{n-1})$$

3.5

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม 1.1 และบทนิยาม 3.1 จะได้

$$\begin{aligned} mF_{n+1} &= \frac{m}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\ &= \frac{m}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-1}\alpha^2 - \beta^{n-1}\beta^2] \\ &= \frac{m}{\sqrt{5}}[\alpha^{n-1}(\sqrt{5}\alpha - 1) - \beta^{n-1}(-\sqrt{5}\beta - 1)] \\ &= \frac{m}{\sqrt{5}}[\sqrt{5}\alpha^n - \alpha^{n-1} + \sqrt{5}\beta^n + \beta^{n-1}] \\ &= \frac{m}{\sqrt{5}}[\sqrt{5}(\alpha^n + \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})] \\ &= m(\alpha^n + \beta^n) - m \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \\ &= S_n - mF_{n-1} \end{aligned}$$

ในทฤษฎีบทต่อไป จะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนฟีโบนัชชี จำนวนลูคัส และจำนวนคล้ายลูคัส

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$S_{n+1} = \frac{m}{2}[5F_n + L_n] \quad 3.6$$

บทพิสูจน์ พิสูจน์จากบทนิยาม 1.1 และบทนิยาม 3.1 จะได้

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= m[\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}] \\ &= \frac{m}{2\sqrt{5}}[2\sqrt{5}\alpha^n\alpha + 2\sqrt{5}\beta^n\beta] \\ &= \frac{m}{2\sqrt{5}}\left[2\sqrt{5}\alpha^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2\sqrt{5}\beta^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\ &= \frac{m}{2\sqrt{5}}[\sqrt{5}\alpha^n(1+\sqrt{5}) + \sqrt{5}\beta^n(1-\sqrt{5})] \\ &= \frac{m}{2\sqrt{5}}[\sqrt{5}\alpha^n + 5\alpha^n + \sqrt{5}\beta^n - 5\beta^n] \\ &= \frac{m}{2}\left[5\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + \sqrt{5}\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\right] \\ &= \frac{m}{2}[5F_n + L_n] \end{aligned}$$

4. อภิปรายผลการวิจัย

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ ได้ทฤษฎีบทบางประการเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนัชชี จำนวนลูคัส และจำนวนคล้ายลูคัส โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของจำนวนคล้ายลูคัส s_n ที่มีความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $S_0 = 2m$ และ $S_1 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม และนำไปสู่ฟังก์ชันก่อกำเนิดจากสูตรบินด์สำหรับลำดับคล้ายลูคัส

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณอาจารย์ หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลาทุกท่านที่ให้คำปรึกษา และความรู้ในการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์จนกระทั่งวิจัยฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย และขอขอบคุณครอบครัวที่คอยให้กำลังใจ รวมถึงการช่วยเหลือที่มีให้กันมาตลอด

6. เอกสารอ้างอิง

- Arfat Ahmad Wani, O.P. Sikhwal, Kiran Sisodiya. (2016). Relations among Fibonacci, Lucas and Fibonacci-Like Sequences, International Journal of Recent Trends in Engineering and Research (IJRTER), Vol.2,12 pages.
- Koshy, T. (2001). Fibonacci and lucas numbers with applications. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons Inc.
- Gupta Y.K., Sisodiya K., Singh M. (2015). Generalization of Fibonacci Sequence and Related Properties, Research Journal of Computation and Mathematics, 3(2), 12-18.