

[illegible]

การประชุมวิชาการระดับชาติ
ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเครือข่ายภาคใต้ ครั้งที่ 8 และ
การประชุมวิชาการระดับนานาชาติ
ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเครือข่ายภาคใต้ ครั้งที่ 1

The 8th National Conference on Science and Technology 2023 (NSCIC2023) and
The 1st International Conference on Science and Technology 2023 (INSCIC2023)

วันที่ 21-22 กุมภาพันธ์ 2566
คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร
มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

สมบัติการวางนัยทั่วไปของจำนวนไฮบริด k-จาคอบทาล และจำนวนไฮบริด k-จาคอบทาล-ลูคัส Properties of generalization of k-Jacobsthal and k-Jacobsthal-lucas hybrid numbers

อารียา โซฮซานะ¹, ณัฐนิชา แดสา¹ และศรัณยา เฮงสวัสด์^{1*}
Areeya Sohsanae¹, Natthanicha Daesa¹ and Saranya Hangsawat^{1*}

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา 90000

¹Program in Mathematics, Faculty of Science and Technology, Songkhla Rajabhat University, Muang, Songkhla 90000, Thailand

*Corresponding author, e-mail: saranya.nu@skru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาจำนวนไฮบริดจาคอบทาลและจำนวนไฮบริดจาคอบทาล-ลูคัส ที่มีความสัมพันธ์
 $JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h$ และ $jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h$
โดยพัฒนาจาก k-จาคอบทาลและ k-จาคอบทาล-ลูคัส ที่มีความสัมพันธ์เวียนเกิด $J_{k,n} = (k-1)J_{k,n-1} + kJ_{k,n-2}$
เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ และ $j_{k,n} = (k-1)j_{k,n-1} + kj_{k,n-2}$ เงื่อนไขค่าเริ่มต้น
 $j_{k,0} = 2, j_{k,1} = 2$ และสร้างสูตรบินेटของลำดับดังกล่าวและใช้สูตรบินेटแสดงสมบัติของจำนวนไฮบริด k-จาคอบทาล
และจำนวนไฮบริด k-จาคอบทาล-ลูคัส

คำสำคัญ : จำนวนไฮบริดจาคอบทาล จำนวนไฮบริดจาคอบทาล-ลูคัส สูตรบินेट

Abstract

In this paper, we introduce Jacobsthal hybrid numbers and Jacobsthal-Lucas hybrid numbers :
 $JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h$ and $jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h$
where as $J_{k,n} = (k-1)J_{k,n-1} + kJ_{k,n-2}$ with initial conditions $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ and
 $j_{k,n} = (k-1)j_{k,n-1} + kj_{k,n-2}$ with initial conditions $j_{k,0} = 2, j_{k,1} = 2$. Moreover, we study the Binet
formulas and use them to prove some properties of k-Jacobsthal hybrid numbers and k- Jacobsthal-Lucas
hybrid number.

Keywords: Jacobsthal hybrid number, Jacobsthal-Lucas hybrid number, Binet formula.

บทนำ

ลำดับจาคอบทาล เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ถูกตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน Ernst Jacobsthal
และได้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากที่พัฒนาเอาแนวคิดไปใช้ เช่น

Silesianae (2019) ได้ศึกษาจำนวนจาคอบทาลและจำนวนไฮบริดจาคอบทาล-ลูคัส โดยความสัมพันธ์เวียนเกิด
 $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ และ $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_0 = 0, J_1 = 1$ และ

$j_0 = 2, j_1 = 1$ ต่อมา AL-KATEEB (2021) ได้ศึกษาและเกิดความสนใจเกี่ยวกับนัยทั่วไป จำนวนจาร์คอบทลและ

จำนวนคอบทล-ลูคัส คือ $J_{k,n} = (k-1)J_{k,n-1} + kJ_{k,n-2}$ และ $j_{k,n} = (k-1)j_{k,n-1} + kj_{k,n-2}$

โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ และ $j_{k,0} = 2, j_{k,1} = 1$ Esra ERKAN (2021) ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวน

k-ฟีโบนัชชีและจำนวนไฮบริด k-ลูคัส คือ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_0 = F_1 = 1$

และ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_0 = 2, L_1 = 1$ ในปีเดียวกัน Szynal-Liana (2021) ได้ศึกษา

เกี่ยวกับ จำนวนไฮบริด $j(r,n)$ จาร์คอบทล คือ $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$J_0 = 0, J_1 = 1, J(r,n) = 2^r J(r,n-1) + (2^r + 4^r)J(r,n-2)$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$J(r,0) = 1, J(r,1) = 1 + 2^{r+1}$ Cerda-Morales (2021) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการตรวจสอบคุณสมบัติและจำนวน

ไฮบริดฟีโบนัชชีทั่วไป คือ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_0 = 0, F_1 = 1$ และ $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ โดย

กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_0 = 2, L_1 = 1$ และ Aydin (2021) ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนไฮบริด k-ฟีโบนัชชีและการแทน

เมทริกซ์ คือ $F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, n \geq 1$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$

การทำวิจัยในครั้งนี้ผู้จัดสนใจที่จะศึกษาเรื่อง จำนวนไฮบริดจาร์คอบทลและจำนวนไฮบริดจาร์คอบทล-ลูคัส

โดยพัฒนาจากจำนวน k-จาร์คอบทลและ k-จาร์คอบทล-ลูคัส ที่มีความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$J_{k,n} = (k-1)J_{k,n-1} + kJ_{k,n-2}$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ และ

$j_{k,n} = (k-1)j_{k,n-1} + kj_{k,n-2}$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $j_{k,0} = 2, j_{k,1} = 2$ และจะศึกษาสูตรบินเนตรวมถึง
สมบัติที่เกี่ยวข้องกับไฮบริด k-จาร์คอบทลและจำนวนไฮบริด k-จาร์คอบทล-ลูคัส

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาเกี่ยวกับไฮบริด k-จาร์คอบทล และจำนวนไฮบริด k-จาร์คอบทล-ลูคัส สร้างสูตรบินเนตของไฮบริด k-จาร์คอบทล และจำนวนไฮบริด k-จาร์คอบทล-ลูคัส และเอกลักษณ์ไฮบริด k-จาร์คอบทล และจำนวนไฮบริด k-จาร์คอบทล-ลูคัส โดยใช้สูตรบินเนต

วิธีดำเนินการวิจัย

AL-KATEEB (2021) กำหนดให้ $k \geq 2, n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม นัยทั่วไปจำนวนจาร์คอบทลและจำนวนจาร์คอบทล-ลูคัส ที่กำหนดโดย $J_{k,n} = (k-1)J_{k,n-1} + kJ_{k,n-2}$ และ $j_{k,n} = (k-1)j_{k,n-1} + kj_{k,n-2}$ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ และ $j_{k,0} = j_{k,1} = 2$ ตามลำดับ และนำเสนอฟังก์ชันก่อกำเนิดและสูตรบินเนตของจำนวนจาร์คอบทลและจำนวนจาร์คอบทล-ลูคัส ดังทฤษฎีต่อไป

ทฤษฎีบท 1 AL-KATEEB (2021) ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $J_{k,n}$ และ $j_{k,n}$ คือ

$$J(x) = \frac{x}{1 - (k-1)x - kx^2}$$

$$j(x) = \frac{2(x+2-k)}{1 - (k-1)x - kx^2}$$

ทฤษฎีบท 2 AL-KATEEB (2021) พจน์ที่ n จำนวนจาร์คอบทลและจำนวนจาร์คอบทล-ลูคัส คือ

$$J_{k,n} = \frac{k^n - (-1)^n}{k+1}$$

$$j_{k,n} = \frac{4k^n + 2(k-1)(-1)^n}{k+1}$$

พิจารณาเซต K ของจำนวนไฮบริด Z เมื่อ $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$
โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ จะได้

$$1. \quad i^2 = -1, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad h^2 = 1 \text{ และ}$$

$$2. \quad ih = -hi = \varepsilon + i$$

ให้ $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ และ $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ เป็นจำนวนไฮบริดสองจำนวนใดๆ จะได้

$$1. \quad Z_1 = Z_2, \quad a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 = d_2, \quad (\text{การเท่ากัน})$$

$$2. \quad Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h \quad (\text{การบวก})$$

$$3. \quad Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)\varepsilon + (d_1 - d_2)h \quad (\text{การลบ})$$

$$4. \quad sZ_1 = sa_1 + sb_1i + sc_1\varepsilon + sd_1h \quad (\text{การคูณด้วยสเกลาร์})$$

ได้ตารางการคูณของจำนวนไฮบริด ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 การคูณจำนวนไฮบริด

$\bullet$	i	ε	h
i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	$h+1$	0	$-\varepsilon$
h	$-\varepsilon-i$	ε	1

นิยาม $\overline{Z} = \overline{a+bi+c\varepsilon+dh} = a-bi-c\varepsilon-dh$

$$C(Z) = Z\overline{Z} = \overline{Z}Z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$$

เรียก $C(Z)$ ว่า เอกลักษณะไฮบริดของ Z

ผลการวิจัย

ในส่วนนี้จะศึกษาเกี่ยวกับจำนวนไฮบริด k -จาร์คอบทล และจำนวนไฮบริด k -จาร์คอบทล-ลูคัส และสร้าง
สูตรบีเนต เพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์สมบัติต่างๆ

บทนิยาม 3 ให้ $n \geq 0$ พจน์ที่ n ของจำนวนไฮบริดจาร์คอบทลแทนด้วย $JH_{k,n}$ และพจน์ที่ n ของจำนวนไฮบริดจาร์
คอบทล-ลูคัสแทนด้วย $jH_{k,n}$ ถูกนิยามดังนี้

$$JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h \quad (1)$$

$$jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h \quad (2)$$

ตามลำดับ

จากสมการข้างต้น เราสามารถเขียนจำนวนไฮบริดของจาร์คอบทลและจาร์คอบทล-ลูคัส นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 JH_{k,0} &= J_{k,0} + J_{k,1}i + J_{k,2}\varepsilon + J_{k,3}h \\
 &= 0 + i + (k-1)\varepsilon + (k^2 - k + 1)h \\
 JH_{k,1} &= J_{k,1} + J_{k,2}i + J_{k,3}\varepsilon + J_{k,4}h \\
 &= 1 + (k-1)i + (k^2 - k + 1)\varepsilon + (k^3 - k^2 + k - 1)h \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 jH_{k,0} &= j_{k,0} + j_{k,1}i + j_{k,2}\varepsilon + j_{k,3}h \\
 &= 2 + 2i + (4k-2)\varepsilon + (4k^2 - 4k + 2)h \\
 jH_{k,1} &= j_{k,1} + j_{k,2}i + j_{k,3}\varepsilon + j_{k,4}h \\
 &= 2 + (4k-2)i + (4k^2 - 4k + 2)\varepsilon + (4k^3 - 4k^2 + 4k - 2)h \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้

$$\begin{aligned}
 C(JH_{k,n}) &= J_{k,n}^2 + (3 - 2k - k^2)J_{k,n+1}^2 - 2kJ_{k,n}J_{k,n+1} \\
 &\quad - 2k(k-1)J_{k,n+1}J_{k,n+2} - (k-1)^2J_{k,n+2}^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

พิสูจน์ จาก $JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } C(JH_{k,n}) &= J_{k,n}^2 + J_{k,n+1}^2 - 2J_{k,n+1}J_{k,n+2} - J_{k,n+3}^2 \\
 &= J_{k,n}^2 + J_{k,n+1}^2 - 2J_{k,n+1}((k-1)J_{k,n+1} + kJ_{k,n}) \\
 &\quad - ((k-1)J_{k,n+2} + kJ_{k,n+1})^2 \\
 &= J_{k,n}^2 + J_{k,n+1}^2 - 2J_{k,n+1} \cdot (k-1)J_{k,n+1} - 2J_{k,n+1} \cdot kJ_{k,n} \\
 &\quad - ((k-1)^2J_{k,n+2}^2 + 2(k-1)J_{k,n+2}kJ_{k,n+1} + k^2J_{k,n+1}^2) \\
 &= J_{k,n}^2 + J_{k,n+1}^2 - 2(k-1)J_{k,n+1}^2 - 2kJ_{k,n}J_{k,n+1} - (k-1)^2J_{k,n+2}^2 \\
 &\quad - 2k(k-1)J_{k,n+1}J_{k,n+2} - k^2J_{k,n+1}^2 \\
 &= J_{k,n}^2 + J_{k,n+1}^2 - 2(k-1)J_{k,n+1}^2 - k^2J_{k,n+1}^2 - 2kJ_{k,n}J_{k,n+1} \\
 &\quad - 2k(k-1)J_{k,n+1}J_{k,n+2} - (k-1)^2J_{k,n+2}^2 \\
 &= J_{k,n}^2 + (1 - 2k + 2 - k^2)J_{k,n+1}^2 - 2kJ_{k,n}J_{k,n+1} \\
 &\quad - 2k(k-1)J_{k,n+1}J_{k,n+2} - (k-1)^2J_{k,n+2}^2 \\
 &= J_{k,n}^2 + (3 - 2k - k^2)J_{k,n+1}^2 - 2kJ_{k,n}J_{k,n+1} - 2k(k-1)J_{k,n+1}J_{k,n+2} \\
 &\quad - (k-1)^2J_{k,n+2}^2
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้

$$JH_{k,n} = \frac{1}{k+1} \left[k^n(1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h) - (-1)^n(1 - i + \varepsilon - h) \right] \quad (4)$$

พิสูจน์ จาก $JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{k^n - (-1)^n}{k+1} \right] + \left[\frac{k^{n+1} - (-1)^{n+1}}{k+1} \right] i + \left[\frac{k^{n+2} - (-1)^{n+2}}{k+1} \right] \varepsilon \\ &\quad + \left[\frac{k^{n+3} - (-1)^{n+3}}{k+1} \right] h \\ &= \frac{1}{k+1} \left[k^n + k^n \cdot ki + k^n \cdot k^2\varepsilon + k^n \cdot k^3h - (-1)^n + (-1)^n i \right. \\ &\quad \left. - (-1)^n \varepsilon + (-1)^n h \right] \\ &= \frac{1}{k+1} \left[k^n(1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h) - (-1)^n(1 - i + \varepsilon - h) \right] \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 6 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้

$$\begin{aligned} C(jH_{k,n}) &= j_{k,n}^2 + (3 - 2k - k^2)j_{k,n+1}^2 - 2kj_{k,n}j_{k,n+1} \\ &\quad - 2k(k-1)j_{k,n+1}j_{k,n+2} - (k-1)^2j_{k,n+2}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

พิสูจน์ จาก $jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h$

จะได้ $C(jH_{k,n}) = j_{k,n}^2 + j_{k,n+1}^2 - 2j_{k,n+1}j_{k,n+2} - j_{k,n+3}^2$

$$\begin{aligned} &= j_{k,n}^2 + j_{k,n+1}^2 - 2j_{k,n+1}((k-1)j_{k,n+1} + kj_{k,n}) \\ &\quad - ((k-1)j_{k,n+2} + kj_{k,n+1})^2 \\ &= j_{k,n}^2 + j_{k,n+1}^2 - 2j_{k,n+1} \cdot (k-1)j_{k,n+1} - 2j_{k,n+1} \cdot kj_{k,n} \\ &\quad - ((k-1)^2j_{k,n+2}^2 + 2(k-1)j_{k,n+2}kj_{k,n+1} + k^2j_{k,n+1}^2) \\ &= j_{k,n}^2 + j_{k,n+1}^2 - 2(k-1)j_{k,n+1}^2 - 2kj_{k,n}j_{k,n+1} - (k-1)^2j_{k,n+2}^2 \\ &\quad - 2k(k-1)j_{k,n+1}j_{k,n+2} - k^2j_{k,n+1}^2 \\ &= j_{k,n}^2 + j_{k,n+1}^2 - 2(k-1)j_{k,n+1}^2 - k^2j_{k,n+1}^2 - 2kj_{k,n}j_{k,n+1} \\ &\quad - 2k(k-1)j_{k,n+1}j_{k,n+2} - (k-1)^2j_{k,n+2}^2 \\ &= j_{k,n}^2 + (1 - 2k + 2 - k^2)j_{k,n+1}^2 - 2kj_{k,n}j_{k,n+1} \\ &\quad - 2k(k-1)j_{k,n+1}j_{k,n+2} - (k-1)^2j_{k,n+2}^2 \\ &= j_{k,n}^2 + (3 - 2k - k^2)j_{k,n+1}^2 - 2kj_{k,n}j_{k,n+1} - 2k(k-1)j_{k,n+1}j_{k,n+2} \\ &\quad - (k-1)^2j_{k,n+2}^2 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้

$$jH_{k,n} = \frac{1}{k+1} \left[4k^n (1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h) + 2(k-1)(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \quad (6)$$

พิสูจน์ จาก $jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h$

$$\begin{aligned} &= \frac{4k^n + 2(k-1)(-1)^n}{k+1} + \frac{4k^{n+1} + 2(k-1)(-1)^{n+1}}{k+1} i \\ &+ \frac{4k^{n+2} + 2(k-1)(-1)^{n+2}}{k+1} \varepsilon + \frac{4k^{n+3} + 2(k-1)(-1)^{n+3}}{k+1} h \\ &= \frac{1}{k+1} \left[4k^n + 4k^n \cdot ki + 4k^n \cdot k^2\varepsilon + 4k^n \cdot k^3h + 2(k-1)(-1)^n \right. \\ &\quad \left. - 2(k-1)(-1)^n i + 2(k-1)(-1)^n \varepsilon - 2(k-1)(-1)^n h \right] \\ &= \frac{1}{k+1} \left[4k^n (1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h) + 2(k-1)(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 8 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & JH_{k,n+1} + JH_{k,n} = k^n (1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h) \\ \text{(ii)} \quad & jH_{k,n+1} + jH_{k,n} \\ &= \frac{1}{k+1} \left[4k^n (k+1) + (k^2 + k)i + (k^3 + k^2)\varepsilon + (k^4 + k^3)h \right] \\ \text{(iii)} \quad & JH_{k,n+1} - JH_{k,n} \\ &= \frac{1}{k+1} \left[k^n (k-1) (1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h) + 2(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\ \text{(iv)} \quad & jH_{k,n+1} - jH_{k,n} \\ &= \frac{k-1}{k+1} \left[4k^n (1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h) - 4(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \end{aligned}$$

พิสูจน์ จะแสดง (i)

จาก $JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h$

จะได้ $JH_{k,n+1} + JH_{k,n} = \left[J_{k,n+1} + J_{k,n+2}i + J_{k,n+3}\varepsilon + J_{k,n+4}h \right]$

$$\begin{aligned} &+ \left[J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h \right] \\ &= \left[J_{k,n+1} + J_{k,n} \right] + \left[J_{k,n+2} + J_{k,n+1} \right] i \\ &+ \left[J_{k,n+3} + J_{k,n+2} \right] \varepsilon + \left[J_{k,n+4} + J_{k,n+3} \right] h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{k^n \cdot k + (-1)^n}{k+1} + \frac{k^n - (-1)^n}{k+1} \right] \\
&+ \left[\frac{k^n \cdot k^2 - (-1)^n}{k+1} + \frac{k^n \cdot k + (-1)^n}{k+1} \right] i \\
&+ \left[\frac{k^n \cdot k^3 + (-1)^n}{k+1} + \frac{k^n \cdot k^2 - (-1)^n}{k+1} \right] \varepsilon \\
&+ \left[\frac{k^n \cdot k^4 - (-1)^n}{k+1} + \frac{k^n \cdot k^3 + (-1)^n}{k+1} \right] h \\
&= \left[\frac{k^n \cdot k}{k+1} + \frac{k^n}{k+1} \right] + \left[\frac{k^n \cdot k^2}{k+1} + \frac{k^n \cdot k}{k+1} \right] i \\
&+ \left[\frac{k^n \cdot k^3}{k+1} + \frac{k^n \cdot k^2}{k+1} \right] \varepsilon + \left[\frac{k^n \cdot k^4}{k+1} + \frac{k^n \cdot k^3}{k+1} \right] h \\
&= \frac{1}{k+1} \left[(k^n \cdot k + k^n) + (k^n \cdot k^2 + k^n \cdot k)i \right. \\
&\quad \left. + (k^n \cdot k^3 + k^n \cdot k^2)\varepsilon + (k^n \cdot k^4 + k^n \cdot k^3)h \right] \\
&= \frac{1}{k+1} \left[k^n((k+1) + k(k+1)i + k^2(k+1)\varepsilon + k^3(k+1)h) \right] \\
&= k^n(1 + ki + k^2\varepsilon + k^3h)
\end{aligned}$$

จะแสดง (ii)

จาก $jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h$

จะได้ $jH_{k,n+1} + jH_{k,n} = \left[j_{k,n+1} + j_{k,n+2}i + j_{k,n+3}\varepsilon + j_{k,n+4}h \right]$

$$\begin{aligned}
&+ \left[j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h \right] \\
&= [j_{k,n+1} + j_{k,n}] + [j_{k,n+2} + j_{k,n+1}]i \\
&+ [j_{k,n+3} + j_{k,n+2}]\varepsilon + [j_{k,n+4} + j_{k,n+3}]h \\
&= \left[\frac{4k^n \cdot k + 2(k-1)(-1)^n}{k+1} + \frac{4k^n + 2(k-1)(-1)^n}{k+1} \right] \\
&+ \left[\frac{4k^n \cdot 4k^2 + 2(k-1)(-1)^n}{k+1} + \frac{4k^n \cdot 4k - 2(k-1)(-1)^n}{k+1} \right] i \\
&+ \left[\frac{4k^n \cdot 4k^3 - 2(k-1)(-1)^n}{k+1} + \frac{4k^n \cdot 4k^2 + 2(k-1)(-1)^n}{k+1} \right] \varepsilon \\
&+ \left[\frac{4k^n \cdot 4k^4 + 2(k-1)(-1)^n}{k+1} + \frac{4k^n \cdot 4k^3 - 2(k-1)(-1)^n}{k+1} \right] h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{4k^n \cdot k}{k+1} + \frac{4k^n}{k+1} \right] + \left[\frac{4k^n \cdot k^2}{k+1} + \frac{4k^n \cdot k}{k+1} \right] i \\
 &+ \left[\frac{4k^n \cdot k^3}{k+1} + \frac{4k^n \cdot k^2}{k+1} \right] \varepsilon + \left[\frac{4k^n \cdot k^4}{k+1} + \frac{4k^n \cdot k^3}{k+1} \right] h \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[(4k^n \cdot k + 4k^n) + (4k^n \cdot k + 4k^n \cdot k) i \right. \\
 &\quad \left. + (4k^n \cdot k^3 + 4k^n \cdot k^2) \varepsilon + (4k^n \cdot k^4 + 4k^n \cdot k^3) h \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[4k^n ((k+1) + (k^2+k)i + (k^3+k^2)\varepsilon + (k^4+k^3)h) \right]
 \end{aligned}$$

การพิสูจน์ ข้อ (iii)-(iv) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 9 ให้ $n \geq r \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & JH_{k,n+r} + JH_{k,n-r} \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[k^{n-r} (k^{2r} + 1) (1 - ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) - 2(-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 (ii) \quad & jH_{k,n+r} + jH_{k,n-r} \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[4k^{n-r} (k^{2r} + 1) (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) + 4(k-1)(-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 (iii) \quad & JH_{k,n+r} - JH_{k,n-r} \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[k^{n-r} (k^{2r} - 1) (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right] \\
 (iv) \quad & jH_{k,n+r} - jH_{k,n-r} \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[4k^{n-r} (k^{2r} - 1) (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right]
 \end{aligned}$$

พิสูจน์ จะแสดง (i)

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } JH_{k,n} &= \frac{1}{k+1} \left[k^n (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) - (-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 JH_{k,n+r} + JH_{k,n-r} &= \frac{1}{k+1} \left[k^{n+r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) - (-1)^{n+r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{k+1} \left[k^{n-r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) - (-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[k^{n+r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) + k^{n-r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. - (-1)^{n+r} (1 - i + \varepsilon - h) - (-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[(1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) (k^{n+r} + k^{n-r}) \right. \\
 &\quad \left. - (1 - i + \varepsilon - h) ((-1)^{n+r} + (-1)^{n-r}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k+1} \left[k^{n-r} (k^{2r} + 1) (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. - (-1)^{n-r} ((-1)^{2r} + 1) (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[k^{n-r} (k^{2r} + 1) (1 - ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. - 2(-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right]
 \end{aligned}$$

พิสูจน์ จะแสดง (ii)

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } jH_{k,n} &= \frac{1}{k+1} \left[4k^n (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) + 2(k-1)(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 jH_{k,n+r} + jH_{k,n-r} &= \frac{1}{k+1} \left[4k^{n+r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. + 2(k-1)(-1)^{n+r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] + \left[4k^{n-r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. + 2(k-1)(-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[4k^{n+r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. + 4k^{n-r} (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) + 2(k-1)(-1)^{n+r} (1 - i + \varepsilon - h) \right. \\
 &\quad \left. + 2(k-1)(-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[(1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) (4k^{n+r} + 4k^{n-r}) \right. \\
 &\quad \left. + (1 - i + \varepsilon - h) (2(k-1)) ((-1)^{n+r} + (-1)^{n-r}) \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[4k^{n-r} (k^{2r} + 1) (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. + 2(k-1)(-1)^{n-r} ((-1)^{2r} + 1) (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 &= \frac{1}{k+1} \left[4k^{n-r} (k^{2r} + 1) (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) \right. \\
 &\quad \left. + 4(k-1)(-1)^{n-r} (1 - i + \varepsilon - h) \right]
 \end{aligned}$$

สามารถพิสูจน์ ข้อ (iii)-(iv) ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 10 ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad JH_{k,n} + jH_{k,n} &= \frac{1}{k+1} \left[5k^n (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) - (3 - 2k)(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 \text{(ii)} \quad JH_{k,n+2} + 2JH_{k,n} &= \frac{1}{k+1} \left[k^n (k^2 + 2) (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) - 3(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right] \\
 \text{(iii)} \quad 3JH_{k,n} + jH_{k,n} &= \frac{1}{k+1} \left[7k^n (1 + ki + k^2 \varepsilon + k^3 h) - (5 - 2k)(-1)^n (1 - i + \varepsilon - h) \right]
 \end{aligned}$$

พิสูจน์ จะแสดง (i)

$$\text{จาก } JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h$$

$$jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h \text{ จะได้}$$

$$\begin{aligned} JH_{k,n} + jH_{k,n} &= \frac{1}{k+1} \left[k^n(1+ki+k^2\varepsilon+k^3h) - (-1)^n(1-i+\varepsilon-h) \right] \\ &\quad + \frac{1}{k+1} \left[4k^n(1+ki+k^2\varepsilon+k^3h) + 2(k-1)(-1)^n(1-i+\varepsilon-h) \right] \\ &= \frac{1}{k+1} \left[(1+ki+k^2\varepsilon+k^3h)(k^n+4k^n) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^n(1-i+\varepsilon-h)(1-2(k-1)) \right] \\ &= \frac{1}{k+1} \left[5k^n(1+ki+k^2\varepsilon+k^3h) - (3-2k)(-1)^n(1-i+\varepsilon-h) \right] \end{aligned}$$

สามารถพิสูจน์ ข้อ (ii)-(iii) ได้ในทำนองเดียวกัน

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้สร้างสูตรบินต์เพื่อเอาไปใช้ศึกษาสมบัติบางประการของจำนวนไฮบริดจาร์คอบทัลและจำนวนไฮบริดจาร์คอบทัล-ลูคัส $JH_{k,n} = J_{k,n} + J_{k,n+1}i + J_{k,n+2}\varepsilon + J_{k,n+3}h$ และ

$$jH_{k,n} = j_{k,n} + j_{k,n+1}i + j_{k,n+2}\varepsilon + j_{k,n+3}h$$

การทำวิจัยครั้งต่อไปสามารถขยายแนวคิดของ จำนวนไฮบริด k-จาร์คอบทัล และจำนวนไฮบริด k-จาร์คอบทัล-ลูคัส โดยการเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นหรือความสัมพันธ์เวียนเกิด และศึกษาสูตรบินต์หรือสมบัติเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- ALA'A AL-KATEEB. (2021). A GENERALIZATION OF JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL-LUCAS NUMBERS. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*, 467-481.
- Ali DAĞDEVİREN Esra ERKAN. (2021). k – Fibonacci and k – Lucas Hybrid Numbers. *Tamap Journal of Mathematics and Statistics*, 125.
- Iwona Włoch Anetta Szynal-Liana. (2019). ON JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL-LUCAS HYBRID NUMBERS. *Annales Mathematicae Silesianae*, 276-283.
- Dorota Brod—Anetta Szynal-Liana. (2021). ON J(r, n)-JACOBSTHAL HYBRID NUMBERS. *Mathematical Publications*, 13-26.
- Fugen Torunbalcı Aydın. (2021). On k-Fibonacci hybrid numbers and their matrix representations. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 257-266.
- Gamaliel Cerda-Morales. (2021). Investigation Of Generalized Fibonacci Hybrid Numbers And Their Properties. *Applied Mathematics E-Notes*, 110-118.