

พหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียน เพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน

ธีรภัทร ไกรช่วย^{1,*}, พนิชพล รามมาก¹, อติศักดิ์ เต็มเพชรหนอง¹
และ ภัทรวรรณ สิงควานนท์^{1,†}

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา 90000

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน ซึ่งเป็นการต่อยอดจากงานวิจัยของ H. Arslan (2021) โดยได้ศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิด สูตรบินต ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และเอกลักษณ์แคสสินี ของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน นอกจากนี้ยังศึกษาผลบวก ผลต่าง และผลคูณ ระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน กับสังยุค และระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียนกับสังยุคในลักษณะเดียวกัน

คำสำคัญ: พหุนามเพลล์ พหุนามเพลล์-ลูคัส พหุนามเกาส์เซียนเพลล์ พหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส
พหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน พหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน

2020 MSC: 11B37; 11B39

1 บทนำ

A. F. Horadam [1], [2] ได้แนะนำลำดับฟีโบนัชชีเชิงซ้อน หลังจากนั้นผู้เขียนหลายคนก็ได้ศึกษาลำดับเกาส์เซียนฟีโบนัชชี ลูคัส เพลล์ และเพลล์-ลูคัส ซึ่งลำดับเกาส์เซียนฟีโบนัชชี และลูคัสถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $GF_{n+1} = GF_n + GF_{n-1}$ โดยที่ $GF_0 = i, GF_1 = 1$ และ $GL_{n+1} = GL_n + GL_{n-1}$ โดยที่ $GL_0 = 2 - i, GL_1 = 1 + 2i$ ตามลำดับ นอกจากนี้ลำดับเกาส์เซียนเพลล์ จะถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $GP_{n+1} = 2GP_n + GP_{n-1}$ โดยที่ $GP_0 = i, GP_1 = 1$ และลำดับเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส จะถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $GQ_{n+1} = 2GQ_n + GQ_{n-1}$ โดยที่ $GQ_0 = 2 - 2i, GQ_1 = 2 + 2i$ ในทางกลับกันลำดับพหุนามเพลล์ถูกกำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิด $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) + P_{n-1}(x)$ โดยที่ $P_0(x) = 0, P_1(x) = 1$ ในทำนองเดียวกัน ลำดับพหุนามเพลล์-ลูคัส ถูกกำหนดโดย $Q_{n+1}(x) = 2xQ_n(x) + Q_{n-1}(x)$ โดยที่ $Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x$ นอกจากนี้สมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกับลำดับเหล่านี้ยังได้รับการศึกษาโดย A. F.

*ผู้นำเสนอ (644254034@parichat.skru.ac.th)

†ผู้ประพันธ์บรรณกิจ (pattarawan.pe@skru.ac.th)

Horadam และ Bro. J. M. Mahon [3] ต่อมา S. HALICI และ S. OZ [4] ได้นิยามพหุนามเกาส์เซียนเพลร์ โดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $GP_{n+1}(x) = 2xGP_n(x) + GP_{n-1}(x)$ โดยที่ $GP_0(x) = i, GP_1(x) = 1$ T. Yagmur [5] ได้นิยามพหุนามเกาส์เซียนเพลร์-ลูคัส โดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $GQ_{n+1}(x) = 2xGQ_n(x) + GQ_{n-1}(x)$ โดยที่ $GQ_0(x) = 2 - 2xi, GQ_1(x) = 2x + 2i$

งานวิจัยนี้ได้ขยายแนวคิดของ H. Arslan [6] ซึ่งควอเทอร์เนียนมีแนวคิดมาจากเซตของจำนวนเชิงซ้อน ได้ถูกคิดค้นโดย W.R. Hamilton ซึ่งเขียนแทนในรูปแบบ $k = k_0e_0 + k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = (k_0, k_1, k_2, k_3)$ เมื่อ k_0, k_1, k_2 และ k_3 เป็นจำนวนจริง และ e_0, e_1, e_2 และ e_3 เป็นหน่วยควอเทอร์เนียน อีกทั้งในปี 2021 H. Arslan [6] ได้ให้นิยามของ ลำดับเกาส์เซียนเพลร์ควอเทอร์เนียน และลำดับเกาส์เซียนเพลร์-ลูคัสควอเทอร์เนียน ดังนี้ $QGP_n = e_0GP_n + e_1GP_{n+1} + e_2GP_{n+2} + e_3GP_{n+3}$ และ $QGQ_n = e_0GQ_n + e_1GQ_{n+1} + e_2GQ_{n+2} + e_3GQ_{n+3}$ ตามลำดับ

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิด สูตรรีเนต ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และเอกลักษณ์แคสสินีของพหุนามเกาส์เซียนเพลร์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเพลร์-ลูคัสควอเทอร์เนียน นอกจากนี้ยังศึกษาผลบวก ผลต่าง และผลคูณ ระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลร์ควอเทอร์เนียน กับสังยุค และระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลร์-ลูคัสควอเทอร์เนียน กับสังยุค

2 ความรู้พื้นฐาน

H. Arslan [6] ได้ให้สูตรรีเนตของลำดับเกาส์เซียนเพลร์ควอเทอร์เนียน และลำดับเกาส์เซียนเพลร์-ลูคัสควอเทอร์เนียน ดังนี้

$$QGP_n = \frac{\alpha^n A - \beta^n B}{\alpha - \beta} \text{ และ } QGQ_n = \frac{\alpha^n A + \beta^n B}{2} \text{ ตามลำดับ}$$

เมื่อ $\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2}, \alpha + \beta = 2, \alpha - \beta = 2\sqrt{2}, \alpha\beta = -1$

โดยที่ $A = \sum_{s=0}^3 (\alpha^s + i\alpha^{s-1})e_s$ และ $B = \sum_{s=0}^3 (\beta^s + i\beta^{s-1})e_s$

สังยุคของลำดับเกาส์เซียนเพลร์ควอเทอร์เนียน QGP_n^* และลำดับเกาส์เซียนเพลร์-ลูคัสควอเทอร์เนียน QGQ_n^* กำหนดโดย

$$\begin{aligned} QGP_n^* &= e_0GP_n - e_1GP_{n+1} - e_2GP_{n+2} - e_3GP_{n+3} \text{ และ} \\ QGQ_n^* &= e_0GQ_n - e_1GQ_{n+1} - e_2GQ_{n+2} - e_3GQ_{n+3} \text{ ตามลำดับ} \end{aligned}$$

สังยุคเชิงซ้อนของลำดับเกาส์เซียนเพลร์ควอเทอร์เนียน $\overline{QGP_n}$ และลำดับเกาส์เซียนเพลร์-ลูคัสควอเทอร์เนียน $\overline{QGQ_n}$ กำหนดโดย

$$\begin{aligned} \overline{QGP_n} &= e_0\overline{GP_n} + e_1\overline{GP_{n+1}} + e_2\overline{GP_{n+2}} + e_3\overline{GP_{n+3}} \text{ และ} \\ \overline{QGQ_n} &= e_0\overline{GQ_n} + e_1\overline{GQ_{n+1}} + e_2\overline{GQ_{n+2}} + e_3\overline{GQ_{n+3}} \text{ ตามลำดับ} \end{aligned}$$

A. F. Horadam และ Bro. J. M. Mahon [3] ได้ให้เอกลักษณ์ของพหุนามเพลร์ และพหุนามเพลร์-ลูคัส ดังนี้

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = Q_n(x) = 2xP_n(x) + 2P_{n-1}(x) \quad (2.1)$$

$$Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x) = (4x^2 + 4)P_n(x) \quad (2.2)$$

$$P_n(x)Q_n(x) = P_{2n}(x) \quad (2.3)$$

$$P_{n+2}(x) + P_{n-2}(x) = (4x^2 + 2)P_n(x) \quad (2.4)$$

$$P_{n+2}^2(x) - P_{n-2}^2(x) = (8x^3 + 4x)P_{2n}(x) \quad (2.5)$$

$$Q_{n+1}^2(x) - Q_{n-1}^2(x) = 2x(4x^2 + 4)P_{2n}(x) \quad (2.6)$$

$$\alpha^n(x) = \alpha(x)P_n(x) + P_{n-1}(x) \quad (2.7)$$

$$\beta^n(x) = \beta(x)P_n(x) + P_{n-1}(x) \quad (2.8)$$

เมื่อ $\alpha(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $\beta(x) = x - \sqrt{1+x^2}$

S. HALICI และ S. OZ [4] ได้ให้ความสัมพันธ์ระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ กับพหุนามเพลล์ ดังนี้

$$GP_n(x) = P_n(x) + iP_{n-1}(x) \quad (2.9)$$

โดยที่ $P_0(x) = 0$ และ $P_1(x) = 1$

และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์เขียนในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$GP_{n+1}(x) = 2xGP_n(x) + GP_{n-1}(x) \quad (2.10)$$

โดยที่ $GP_0(x) = i$ และ $GP_1(x) = 1$

สูตรบีเนตของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ คือ

$$GP_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + i \frac{\alpha(x)\beta^n(x) - \alpha^n(x)\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

เมื่อ $\alpha(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $\beta(x) = x - \sqrt{1+x^2}$

T. Yagmur [5] ความสัมพันธ์ระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส กับพหุนามเพลล์-ลูคัส เขียนได้ดังนี้

$$GQ_n(x) = Q_n(x) + iQ_{n-1}(x) \quad (2.11)$$

โดยที่ $Q_0(x) = 2$ และ $Q_1(x) = 2x$

และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสเขียนในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$GQ_{n+1}(x) = 2xGQ_n(x) + GQ_{n-1}(x) \quad (2.12)$$

โดยที่ $GQ_0(x) = 2 - 2xi$ และ $GQ_1(x) = 2x + 2i$

สูตรบีเนตของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส คือ

$$GQ_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) - [\beta(x)\alpha^n(x) + \alpha(x)\beta^n(x)]i$$

เมื่อ $\alpha(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $\beta(x) = x - \sqrt{1+x^2}$

3 ผลการศึกษา

ผลการวิจัยในครั้งนี้ ได้แบ่งศึกษาออกเป็น 2 หัวข้อหลัก คือ เวกลักษณะของพหุนามเกาส์เซียนเพอร์คิวเอเตอร์เนียน และเวกลักษณะของพหุนามเกาส์เซียนเพอร์คิวเอเตอร์เนียน โดยศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิด สูตรบีเนต เวกลักษณะ แคสสินี นอกจากนี้ยังได้ศึกษาผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และเวกลักษณะอื่น ๆ ของทั้งสองพหุนามในลักษณะเดียวกัน

3.1 เวกลักษณะของพหุนามเกาส์เซียนเพอร์คิวเอเตอร์เนียน

บทนิยาม 3.1. ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ พหุนามเกาส์เซียนเพอร์คิวเอเตอร์เนียน กำหนดโดย

$$QGP_n(x) = e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x)$$

เมื่อ e_0, e_1, e_2 และ e_3 เป็นหน่วยควอเทอร์เนียน โดยที่ $e_0^2 = 1, e_0e_i = e_ie_0 = e_i, i = 1, 2, 3$
 $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$ และ $GP_n(x)$ เป็นพจน์ที่ n ของพหุนามเกาส์เซียนเพอร์

ทฤษฎีบท 3.2. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$QGP_n(x) + 2xQGP_{n+1}(x) = QGP_{n+2}(x)$$

พิสูจน์. $QGP_n(x) + 2xQGP_{n+1}(x)$

$$\begin{aligned} &= e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x) \\ &\quad + 2x(e_0GP_{n+1}(x) + e_1GP_{n+2}(x) + e_2GP_{n+3}(x) + e_3GP_{n+4}(x)) \\ &= e_0(2xGP_{n+1}(x) + GP_n(x)) + e_1(2xGP_{n+2}(x) + GP_{n+1}(x)) \\ &\quad + e_2(2xGP_{n+3}(x) + GP_{n+2}(x)) + e_3(2xGP_{n+4}(x) + GP_{n+3}(x)) \\ &= e_0GP_{n+2}(x) + e_1GP_{n+3}(x) + e_2GP_{n+4}(x) + e_3GP_{n+5}(x) \\ &= QGP_{n+2}(x) \end{aligned}$$

□

จากทฤษฎีบท 3.2 ให้ $\alpha(x)$ และ $\beta(x)$ เป็นรากของสมการ $QGP_n(x) + 2xQGP_{n+1}(x) = QGP_{n+2}(x)$ จะได้ $\alpha(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $\beta(x) = x - \sqrt{1+x^2}$, $\alpha(x) + \beta(x) = 2x$, $\alpha(x) - \beta(x) = 2\sqrt{x^2+1}$ และ $\alpha(x)\beta(x) = -1$

บทตั้ง 3.3. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\begin{aligned} \alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) &= \alpha^n(x)A \\ \beta(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) &= \beta^n(x)B \end{aligned}$$

โดยที่ $A = \sum_{k=0}^3 (\alpha^k(x) + i\alpha^{k-1}(x))e_k$ และ $B = \sum_{k=0}^3 (\beta^k(x) + i\beta^{k-1}(x))e_k$

พิสูจน์. $GP_n(x) = P_n(x) + iP_{n-1}(x)$ และ (2.7) : $\alpha^n(x) = \alpha(x)P_n(x) + P_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned} \alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) &= \alpha(x)(e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x)) \\ &\quad + (e_0GP_{n-1}(x) + e_1GP_n(x) + e_2GP_{n+1}(x) + e_3GP_{n+2}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^3 e_k(\alpha(x)GP_{n+k}(x) + GP_{n+k-1}(x)) \\
 &= \sum_{k=0}^3 e_k[(\alpha(x)P_{n+k}(x) + i\alpha(x)P_{n+k-1}(x)) + (P_{n+k-1}(x) + iP_{n+k-2}(x))] \\
 &= \sum_{k=0}^3 e_k[\alpha^{n+k}(x) + i\alpha^{n+k-1}(x)] \\
 &= \alpha^n(x)A
 \end{aligned}$$

และ $GP_n(x) = P_n(x) + iP_{n-1}(x)$ และ (2.8) : $\beta^n(x) = \beta(x)P_n(x) + P_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned}
 &\beta(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x) \\
 &= \beta(x)(e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x)) \\
 &\quad + (e_0GP_{n-1}(x) + e_1GP_n(x) + e_2GP_{n+1}(x) + e_3GP_{n+2}(x)) \\
 &= \sum_{k=0}^3 e_k(\beta(x)GP_{n+k}(x) + GP_{n+k-1}(x)) \\
 &= \sum_{k=0}^3 e_k[(\beta(x)P_{n+k}(x) + P_{n+k-1}(x)) + (\beta(x)iP_{n+k-1}(x) + iP_{n+k-2}(x))] \\
 &= \sum_{k=0}^3 e_k[\beta^n(x)(\beta^k(x) + i\beta^{k-1}(x))] \\
 &= \beta^n(x)B
 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.4. (สูตรบีเนต) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก สูตรบีเนตสำหรับพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน คือ

$$QGP_n(x) = \frac{\alpha^n(x)A - \beta^n(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$\text{โดยที่ } A = \sum_{k=0}^3 (\alpha^k(x) + i\alpha^{k-1}(x))e_k \text{ และ } B = \sum_{k=0}^3 (\beta^k(x) + i\beta^{k-1}(x))e_k$$

พิสูจน์. จากบทตั้ง 3.3 สามารถนำมาพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha^n(x)A - \beta^n(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)} &= \frac{(\alpha(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x)) - (\beta(x)QGP_n(x) + QGP_{n-1}(x))}{\alpha(x) - \beta(x)} \\
 &= QGP_n(x)
 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.5. (เอกลักษณ์แคสสินี) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก เอกลักษณ์ต่อไปนี้เป็นจริง

$$QGP_{n+1}(x)QGP_{n-1}(x) - QGP_n^2(x) = (-1)^n AB$$

$$\text{โดยที่ } A = \sum_{k=0}^3 (\alpha^k(x) + i\alpha^{k-1}(x))e_k \text{ และ } B = \sum_{k=0}^3 (\beta^k(x) + i\beta^{k-1}(x))e_k$$

พิสูจน์. ใช้ผล จากทฤษฎีบท 3.4

$$QGP_{n+1}(x)QGP_{n-1}(x) - QGP_n^2(x)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\alpha^{n+1}(x)A - \beta^{n+1}(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) \left(\frac{\alpha^{n-1}(x)A - \beta^{n-1}(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)} \right) - \left(\frac{\alpha^n(x)A - \beta^n(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} [-\alpha^n(x)\alpha(x)\beta^n(x)\beta^{-1}(x)AB - \beta^n(x)\beta(x)\alpha^n(x)\alpha^{-1}(x)BA + 2\alpha^n(x)\beta^n(x)AB] \\ &= \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} (\alpha(x)\beta(x))^n AB [(-\alpha(x)\beta^{-1}(x) - \beta(x)\alpha^{-1}(x) + 2)] \\ &= \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} (-1)^n AB \left[-\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + 2 \right] \\ &= \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} (-1)^n AB \left[-\frac{\alpha^2(x)}{-1} - \frac{\beta^2(x)}{-1} + 2 \right] \\ &= \frac{1}{(\alpha(x) - \beta(x))^2} (-1)^n AB [(\alpha(x) - \beta(x))^2] \\ &= (-1)^n AB \end{aligned}$$

□

บทนิยาม 3.6. สัญลักษณ์ของพหุนามเกาส์เซียนเฟลด์ควอเตอร์เนียน กำหนดโดย

$$QGP_n^*(x) = e_0GP_n(x) - e_1GP_{n+1}(x) - e_2GP_{n+2}(x) - e_3GP_{n+3}(x)$$

เมื่อ e_0, e_1, e_2 และ e_3 เป็นหน่วยควอเตอร์เนียน โดยที่ $e_0^2 = 1, e_0e_i = e_ie_0 = e_i, i = 1, 2, 3$
 $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$ และ $GP_n(x)$ เป็นพจน์ที่ n ของพหุนามเกาส์เซียนเฟลด์

บทนิยาม 3.7. สัญลักษณ์เชิงซ้อนของพหุนามเกาส์เซียนเฟลด์ควอเตอร์เนียน กำหนดโดย

$$\overline{QGP_n(x)} = e_0\overline{GP_n(x)} + e_1\overline{GP_{n+1}(x)} + e_2\overline{GP_{n+2}(x)} + e_3\overline{GP_{n+3}(x)}$$

เมื่อ e_0, e_1, e_2 และ e_3 เป็นหน่วยควอเตอร์เนียน โดยที่ $e_0^2 = 1, e_0e_i = e_ie_0 = e_i, i = 1, 2, 3$
 $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$ และ $GP_n(x)$ เป็นพจน์ที่ n ของพหุนามเกาส์เซียนเฟลด์

บทตั้ง 3.8. สำหรับพหุนามเกาส์เซียนเฟลด์ควอเตอร์เนียน $QGP_n(x)$ สอดคล้องกับเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$QGP_n(x)QGP_n^*(x) = GP_n^2(x) + GP_{n+1}^2(x) + GP_{n+2}^2(x) + GP_{n+3}^2(x)$$

พิสูจน์. จากบทนิยาม 3.1 และบทนิยาม 3.6 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &QGP_n(x)QGP_n^*(x) \\ &= (e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x)) \\ &\quad (e_0GP_n(x) - e_1GP_{n+1}(x) - e_2GP_{n+2}(x) - e_3GP_{n+3}(x)) \\ &= e_0^2GP_n^2(x) - e_1^2GP_{n+1}^2(x) - e_2^2GP_{n+2}^2(x) - e_3^2GP_{n+3}^2(x) \\ &= GP_n^2(x) + GP_{n+1}^2(x) + GP_{n+2}^2(x) + GP_{n+3}^2(x) \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.9. พหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียนสอดคล้องกับเอกลักษณ์ ดังต่อไปนี้

$$QGP_n(x)QGP_n^*(x) = (x+i)(8x^2+4)P_{2n+2}(x)$$

พิสูจน์. จากบทตั้ง 3.8, (2.1), (2.3), (2.4) และ (2.5)

$$\begin{aligned} QGP_n(x)QGP_n^*(x) &= GP_n^2(x) + GP_{n+1}^2(x) + GP_{n+2}^2(x) + GP_{n+3}^2(x) \\ &= P_{n+3}^2(x) - P_{n-1}^2(x) + 2i(P_n(x)(P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x)) \\ &\quad + P_{n+2}(x)(P_{n+1}(x) + P_{n+3}(x))) \\ &= P_{n+3}^2(x) - P_{n-1}^2(x) + 2i(P_n(x)Q_n(x)) + (P_{n+2}(x)Q_{n+2}(x)) \\ &= P_{n+3}^2(x) - P_{n-1}^2(x) + 2i(P_{2n}(x)) + P_{2(n+2)}(x) \\ &= (8x^3+4x)P_{2(n+1)}(x) + 2i(4x^2+2)P_{2(n+1)}(x) \\ &= (x+i)(8x^2+4)P_{2n+2}(x) \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.10. สำหรับพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน $QGP_n(x)$ สังยุคของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน $QGP_n^*(x)$ และสังยุคเชิงซ้อนของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน $\overline{QGP_n(x)}$ จะได้เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} QGP_n(x) + QGP_n^*(x) &= 2e_0GP_n(x) \\ QGP_n(x) + \overline{QGP_n(x)} &= 2 \sum_{k=0}^3 e_k P_{n+k}(x) \\ QGP_n^2(x) + QGP_n(x)QGP_n^*(x) &= 2e_0GP_n(x)QGP_n(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์. } QGP_n(x) + QGP_n^*(x) &= (e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x)) \\ &\quad + (e_0GP_n(x) - e_1GP_{n+1}(x) - e_2GP_{n+2}(x) - e_3GP_{n+2}(x)) \\ &= 2e_0GP_n(x) \\ QGP_n(x) + \overline{QGP_n(x)} &= (e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x)) \\ &\quad + (e_0\overline{GP_n(x)} + e_1\overline{GP_{n+1}(x)} + e_2\overline{GP_{n+2}(x)} + e_3\overline{GP_{n+3}(x)}) \\ &= 2e_0P_n(x) + 2e_1P_{n+1}(x) + 2e_2P_{n+2}(x) + 2e_3P_{n+3}(x) \\ &= 2 \sum_{k=0}^3 e_k P_{n+k}(x) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} QGP_n^2(x) + QGP_n(x)QGP_n^*(x) &= QGP_n(x)(QGP_n(x) + QGP_n^*(x)) \\ &= 2e_0GP_n(x)QGP_n(x) \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.11. สำหรับพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน $QGP_n(x)$ สังยุคของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน $QGP_n^*(x)$ และสังยุคเชิงซ้อนของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน $\overline{QGP_n(x)}$ จะได้เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} QGP_n(x) - QGP_n^*(x) &= 2 \sum_{k=1}^3 e_k GP_{n+k}(x) \\ QGP_n(x) - \overline{QGP_n(x)} &= 2i \sum_{k=-1}^2 e_k P_{n+k}(x) \end{aligned}$$

$$QGP_n^2(x) - QGP_n(x)QGP_n^*(x) = 2QGP_n(x) \sum_{k=1}^3 e_k GP_{n+k}(x)$$

พิสูจน์. $QGP_n(x) - QGP_n^*(x) = (e_0 GP_n(x) + e_1 GP_{n+1}(x) + e_2 GP_{n+2}(x) + e_3 GP_{n+3}(x))$
 $- (e_0 GP_n(x) - e_1 GP_{n+1}(x) - e_2 GP_{n+2}(x) - e_3 GP_{n+3}(x))$
 $= 2 \sum_{k=1}^3 e_k GP_{n+k}(x)$

$$\begin{aligned} QGP_n(x) - \overline{QGP_n(x)} &= (e_0 GP_n(x) + e_1 GP_{n+1}(x) + e_2 GP_{n+2}(x) + e_3 GP_{n+3}(x)) \\ &\quad - (e_0 \overline{GP_n(x)} + e_1 \overline{GP_{n+1}(x)} + e_2 \overline{GP_{n+2}(x)} + e_3 \overline{GP_{n+3}(x)}) \\ &= 2ie_0 P_{n-1}(x) + 2ie_1 P_n(x) + 2ie_2 P_{n+1}(x) + 2ie_3 P_{n+2}(x) \\ &= 2i \sum_{k=-1}^2 e_k P_{n+k}(x) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} QGP_n^2(x) - QGP_n(x)QGP_n^*(x) &= QGP_n(x)(QGP_n(x) - QGP_n^*(x)) \\ &= 2QGP_n(x) \sum_{k=1}^3 e_k GP_{n+k}(x) \end{aligned}$$

□

3.2 เอกลักษณ์ของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน

บทนิยาม 3.12. ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ พหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน กำหนดโดย

$$QGQ_n(x) = e_0 GQ_n(x) + e_1 GQ_{n+1}(x) + e_2 GQ_{n+2}(x) + e_3 GQ_{n+3}(x)$$

เมื่อ e_0, e_1, e_2 และ e_3 เป็นหน่วยควอเทอร์เนียน โดยที่ $e_0^2 = 1, e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, i = 1, 2, 3,$
 $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1 e_2 e_3 = -1$ และ $GQ_n(x)$ เป็นพจน์ที่ n ของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

ทฤษฎีบท 3.13. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$QGQ_n(x) + 2xQGQ_{n+1}(x) = QGQ_{n+2}(x)$$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 3.2

□

จากทฤษฎีบท 3.13 ให้ $\alpha(x)$ และ $\beta(x)$ เป็นรากของสมการ $QGQ_n(x) + 2xQGQ_{n+1}(x) = QGQ_{n+2}(x)$
 จะได้ $\alpha(x) = x + \sqrt{1+x^2}, \beta(x) = x - \sqrt{1+x^2}, \alpha(x) + \beta(x) = 2x, \alpha(x) - \beta(x) = 2\sqrt{x^2+1}$ และ $\alpha(x)\beta(x) = -1$

บทตั้ง 3.14. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$2xGP_{n+1}(x) + 2GP_n(x) = GQ_{n+1}(x)$$

พิสูจน์. จาก (2.1), (2.9) และ (2.11)

$$\begin{aligned} 2xGP_{n+1}(x) + 2GP_n(x) &= 2x(P_{n+1}(x) + iP_n(x)) + 2(P_n(x) + iP_{n-1}(x)) \\ &= (2xP_{n+1}(x) + 2xiP_n(x)) + (2P_n(x) + 2iP_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2xP_{n+1}(x) + 2P_n(x)) + (2xiP_n(x) + 2iP_{n-1}(x)) \\
 &= (2xP_{n+1}(x) + 2P_n(x)) + i(2xP_n(x) + 2P_{n-1}(x)) \\
 &= Q_{n+1}(x) + iQ_n(x) \\
 &= GQ_{n+1}(x)
 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.15. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$2xQG P_{n+1}(x) + 2QG P_n(x) = QGQ_{n+1}(x)$$

พิสูจน์. จากบทตั้ง 3.14

$$\begin{aligned}
 &2xQG P_{n+1}(x) + 2QG P_n(x) \\
 &= 2x(e_0GP_{n+1}(x) + e_1GP_{n+2}(x) + e_2GP_{n+3}(x) + e_3GP_{n+4}(x)) \\
 &\quad + 2(e_0GP_n(x) + e_1GP_{n+1}(x) + e_2GP_{n+2}(x) + e_3GP_{n+3}(x)) \\
 &= (2xe_0GP_{n+1}(x) + 2e_0GP_n(x)) + (2xe_1GP_{n+2}(x) + 2e_1GP_{n+1}(x)) \\
 &\quad + (2xe_2GP_{n+3}(x) + 2e_2GP_{n+2}(x)) + (2xe_3GP_{n+4}(x) + 2e_3GP_{n+3}(x)) \\
 &= e_0(2xGP_{n+1}(x) + 2GP_n(x)) + e_1(2xGP_{n+2}(x) + 2GP_{n+1}(x)) \\
 &\quad + e_2(2xGP_{n+3}(x) + 2GP_{n+2}(x)) + e_3(2xGP_{n+4}(x) + 2GP_{n+3}(x)) \\
 &= e_0GQ_{n+1}(x) + e_1GQ_{n+2}(x) + e_2GQ_{n+3}(x) + e_3GQ_{n+4}(x) \\
 &= QGQ_{n+1}(x)
 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.16. (สูตรบีเนต) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก สูตรบีเนตสำหรับพหุนามเกาส์เขียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน คือ

$$QGQ_n(x) = \alpha^n(x)A + \beta^n(x)B$$

$$\text{โดยที่ } A = \sum_{k=0}^3 (\alpha^k(x) + i\alpha^{k-1}(x))e_k \text{ และ } B = \sum_{k=0}^3 (\beta^k(x) + i\beta^{k-1}(x))e_k$$

พิสูจน์. จากบทตั้ง 3.3 ทฤษฎีบท 3.15 และ $\alpha(x) + \beta(x) = 2x$

$$\begin{aligned}
 \alpha^n(x)A + \beta^n(x)B &= (\alpha(x)QG P_n(x) + QG P_{n-1}(x)) + (\beta(x)QG P_n(x)) + QG P_{n-1}(x) \\
 &= (\alpha(x)QG P_n(x) + \beta(x)QG P_n(x)) + 2QG P_{n-1}(x) \\
 &= (\alpha(x) + \beta(x))QG P_n(x) + 2QG P_{n-1}(x) \\
 &= 2xQG P_n(x) + 2QG P_{n-1}(x) \\
 &= QGQ_n(x)
 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.17. (เอกลักษณ์แคสลิณี) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก เอกลักษณ์ต่อไปนี้จริง

$$QGQ_{n+1}(x)QGQ_{n-1}(x) - QGQ_n^2(x) = (-1)^{n+1}(\alpha(x) - \beta(x))^2AB$$

$$\text{โดยที่ } A = \sum_{k=0}^3 (\alpha^k(x) + i\alpha^{k-1}(x))e_k \text{ และ } B = \sum_{k=0}^3 (\beta^k(x) + i\beta^{k-1}(x))e_k$$

พิสูจน์. ใช้ผลจากทฤษฎีบท 3.16

$$\begin{aligned}
 QGQ_{n+1}(x)QGQ_{n-1}(x) - QGQ_n^2(x) &= (\alpha^{n+1}(x)A + \beta^{n+1}(x)B)(\alpha^{n-1}(x)A + \beta^{n-1}(x)B) - (\alpha^n(x)A + \beta^n(x)B)^2 \\
 &= \alpha^{n+1}(x)A\beta^{n-1}(x)B + \beta^{n+1}(x)B\alpha^{n-1}(x)A - 2\alpha^n(x)\beta^n(x)AB \\
 &= (\alpha(x)\beta(x))^n AB[(\alpha^1(x)\beta^{-1}(x) + \beta^1(x)\alpha^{-1}(x) - 2)] \\
 &= (-1)^n(-\alpha^2(x) - \beta^2(x) - 2)AB \\
 &= (-1)^{n+1}(\alpha(x) - \beta(x))^2 AB
 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.18. สำหรับพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเตอร์เนียนใด ๆ และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเตอร์เนียนใด ๆ จะได้

$$\frac{QGQ_n^2(x)}{4} - (x^2 + 1)QGP_n^2(x) = (-1)^n AB$$

$$\text{โดยที่ } A = \sum_{k=0}^3 (\alpha^k(x) + i\alpha^{k-1}(x))e_k \text{ และ } B = \sum_{k=0}^3 (\beta^k(x) + i\beta^{k-1}(x))e_k$$

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์. } &\frac{QGQ_n^2(x)}{4} - (x^2 + 1)QGP_n^2(x) \\
 &= \frac{(\alpha^n(x)A + \beta^n(x)B)^2}{4} - (x^2 + 1)\left(\frac{\alpha^n(x)A - \beta^n(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)}\right)^2 \\
 &= \frac{(\alpha^{2n}(x)A^2 + 2\alpha^n(x)\beta^n(x)AB + \beta^{2n}(x)B^2)}{4} - (x^2 + 1)\frac{(\alpha^{2n}(x)A^2 - 2\alpha^n(x)\beta^n(x)AB + \beta^{2n}(x)B^2)}{4x^2 + 4} \\
 &= \frac{\alpha^{2n}(x)A^2 + 2\alpha^n(x)\beta^n(x)AB + \beta^{2n}(x)B^2}{4} - \frac{\alpha^{2n}(x)A^2 - 2\alpha^n(x)\beta^n(x)AB + \beta^{2n}(x)B^2}{4} \\
 &= \frac{4\alpha^n(x)\beta^n(x)AB}{4} \\
 &= (-1)^n AB
 \end{aligned}$$

□

บทนิยาม 3.19. สัมมูลของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเตอร์เนียน กำหนดโดย

$$QGQ_n^*(x) = e_0GQ_n(x) - e_1GQ_{n+1}(x) - e_2GQ_{n+2}(x) - e_3GQ_{n+3}(x)$$

เมื่อ e_0, e_1, e_2 และ e_3 เป็นหน่วยควอเตอร์เนียน โดยที่ $e_0^2 = 1, e_0e_i = e_ie_0 = e_i, i = 1, 2, 3,$
 $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$ และ $GQ_n(x)$ เป็นพจน์ที่ n ของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

บทนิยาม 3.20. สัมมูลเชิงซ้อนของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเตอร์เนียน-ลูคัส กำหนดโดย

$$\overline{QGQ_n(x)} = e_0\overline{GQ_n(x)} + e_1\overline{GQ_{n+1}(x)} + e_2\overline{GQ_{n+2}(x)} + e_3\overline{GQ_{n+3}(x)}$$

เมื่อ e_0, e_1, e_2 และ e_3 เป็นหน่วยควอเตอร์เนียน โดยที่ $e_0^2 = 1, e_0e_i = e_ie_0 = e_i, i = 1, 2, 3,$
 $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$ และ $GQ_n(x)$ เป็นพจน์ที่ n ของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

บทตั้ง 3.21. พหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเตอร์เนียนสอดคล้องกับเอกลักษณ์ ดังต่อไปนี้

$$QGQ_n(x)QGQ_n^*(x) = GQ_n^2(x) + GQ_{n+1}^2(x) + GQ_{n+2}^2(x) + GQ_{n+3}^2(x)$$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับ บทตั้ง 3.8 □

ทฤษฎีบท 3.22. พหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียนสอดคล้องกับเอกลักษณ์ ดังต่อไปนี้

$$QGQ_n(x)QGQ_n^*(x) = ((4x^2 + 4)(8x^3 + 4x) + (8ix^2 + 8i)(4x^2 + 2))P_{2n+2}(x)$$

พิสูจน์. จากบทตั้ง 3.21, (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) และ (2.11)

$$\begin{aligned} QGQ_n(x)QGQ_n^*(x) &= GQ_n^2(x) + GQ_{n+1}^2(x) + GQ_{n+2}^2(x) + GQ_{n+3}^2(x) \\ &= Q_{n+3}^2(x) - Q_{n-1}^2(x) + 2i(Q_n(x)(Q_{n-1}(x) + Q_{n+1}(x)) \\ &\quad + Q_{n+2}(x)(Q_{n+1}(x) + Q_{n+3}(x))) \\ &= Q_{n+3}^2(x) - Q_{n-1}^2(x) + 2i(4(x^2 + 1)P_{2n}(x) + 4(x^2 + 1)P_{2(n+2)}(x)) \\ &= (4x^2 + 4)(8x^3 + 4x)P_{2n+2}(x) + (8ix^2 + 8i)P_{2n}(x) \\ &\quad + (8ix^2 + 8i)P_{2n+4}(x) \\ &= ((4x^2 + 4)(8x^3 + 4x) + (8ix^2 + 8i)(4x^2 + 2))P_{2n+2}(x) \end{aligned} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 3.23. สำหรับพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน $QGQ_n(x)$ สังยุคของพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน $QGQ_n^*(x)$ และสังยุคเชิงซ้อนของพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน $\overline{QGQ_n(x)}$ จะได้เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{aligned} QGQ_n(x) + QGQ_n^*(x) &= 2e_0GQ_n(x) \\ QGQ_n(x) + \overline{QGQ_n(x)} &= 2 \sum_{s=0}^3 e_s Q_{n+s}(x) \\ QGQ_n^2(x) + QGQ_n(x)QGQ_n^*(x) &= 2e_0GQ_n(x)QGQ_n(x) \end{aligned}$$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 3.10 □

ทฤษฎีบท 3.24. สำหรับพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน $QGQ_n(x)$ สังยุคของพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน $QGQ_n^*(x)$ และสังยุคเชิงซ้อนของพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน $\overline{QGQ_n(x)}$ จะได้เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{aligned} QGQ_n(x) - QGQ_n^*(x) &= 2 \sum_{k=1}^3 e_k GQ_{n+k}(x) \\ QGQ_n(x) - \overline{QGQ_n(x)} &= 2i \sum_{k=-1}^2 e_k Q_{n+k}(x) \\ QGQ_n^2(x) - QGQ_n(x)QGQ_n^*(x) &= 2QGQ_n(x) \sum_{k=1}^3 e_k GQ_{n+k}(x) \end{aligned}$$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 3.11 □

4 สรุปผลและอภิปรายผล

งานวิจัยนี้ศึกษาเรื่องพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเฟลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน โดยได้ศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิด สูตรบินต ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ เอกลักษณ์แคสสินี อีกทั้งยังได้ศึกษา ผลบวก ผล

ต่าง และผลคูณ ระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน กับสังยุค และระหว่างพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน กับสังยุค ซึ่งผลการศึกษาดังกล่าว สามารถเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน ได้ดังนี้ $QGP_n(x) + 2xQGP_{n+1}(x) = QGP_{n+2}(x)$ และ $QGQ_n(x) + 2xQGQ_{n+1}(x) = QGQ_{n+2}(x)$ ตามลำดับ สามารถเขียนสูตรปิดของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน ได้ในรูป $QGP_n(x) = \frac{\alpha^n(x)A - \beta^n(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)}$ และ $QGQ_n(x) = \frac{\alpha^n(x)A + \beta^n(x)B}{\alpha(x) - \beta(x)}$ เมื่อ $\alpha(x) = x + \sqrt{1+x^2}$, $\beta(x) = x - \sqrt{1+x^2}$ ตามลำดับ ได้เอกลักษณ์แคสสินี ของพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน คือ $QGP_{n+1}(x)QGQ_{n-1}(x) - QGP_n^2(x) = (-1)^n AB$ และ $QGQ_{n+1}(x)QGQ_{n-1}(x) - QGQ_n^2(x) = (-1)^{n+1}(\alpha(x) - \beta(x))^2 AB$ ตามลำดับ นอกจากนี้เราสามารถศึกษาทฤษฎีบทอื่น ๆ เกี่ยวกับพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ควอเทอร์เนียน และพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสควอเทอร์เนียน ได้ในงานวิจัยเล่มนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] A. F. Horadam, Generalized Fibonacci Sequence, American Math. 68 (1) (1961) 455-459.
- [2] A. F. Horadam, Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions, American Math. 70 (1) (1963) 289-291.
- [3] A. F. Horadam, Bro. J. M. Mahon, M. Abbas, PELL AND PELL-LUCAS POLYNOMIALS, Pearson Education, Australia, 1985.
- [4] S. Halici and S. Oz, On Gaussian Pell Polynomials and Their Some Properties, Palestine Journal of Mathematics. 7 (1) (2018) 251-256.
- [5] T. Yagmur, Gaussian Pell-Lucas Polynomials, Communications in Mathematics and Applications. 10 (4) (2019) 1609-1617.
- [6] H. Arslana, Gaussian Pell and Gaussian Pell-Lucas Quaternions, Filomat. 35 (5) (2021) 673-679.