

สมบัติบางประการของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

อรประภา เถี่ยมแก้ว^{1,*}, สุตาภัทร ชุมสมบูรณ์¹, ศรัณยา เฮงสวัสดิ์¹
และ ภัทรวรรณ สิงควานนท์^{1,†}

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา 90000

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส ซึ่งเป็นการต่อยอดแนวคิดจากงานวิจัยของ E. Ozkan และ T. Alp (2022) โดยได้ศึกษาผลคูณ ผลบวก ผลต่าง และสังยุคของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส รวมทั้งศึกษา ผลบวกย่อย ผลบวกย่อยพจน์คู่ ผลบวกย่อยพจน์คี่ และเมทริกซ์ของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

Keywords: พหุนามเพลล์ พหุนามเพลล์-ลูคัส พหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

2020 MSC: 11B37, 11B83

1 บทนำ

A. Dasdemir [2] ได้ศึกษาจำนวนเพลล์ และจำนวนเพลล์-ลูคัส นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 2$ และ $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $P_0 = 0, P_1 = 1$ และ $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ ตามลำดับ

มีงานวิจัยจำนวนมากได้ศึกษาสมบัติของพหุนามเพลล์ และพหุนามเพลล์-ลูคัส รวมทั้งเอกลักษณ์ที่สำคัญของจำนวนดังกล่าว A. F. Horadam และ Bro. J. M. Mahon [3] ได้ศึกษาพหุนามเพลล์ และพหุนามเพลล์-ลูคัส โดยนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด $P_n(x) = 2P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $P_0(x) = 0, P_1(x) = 1$ และ $Q_n(x) = 2Q_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x), n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $Q_0 = 2, Q_1 = 2x$ ต่อมา S. Halici และ S. Oz [4] ได้นิยามพหุนามเกาส์เซียนเพลล์ โดยนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด $GP_{n+1}(x) = 2xGP_n(x) + GP_{n-1}(x)$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $GP_0(x) = i, GP_1(x) = 1$ และ T. Yagmur [5] ได้นิยามพหุนามเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส $GQ_{n+1}(x) = 2xGQ_n(x) + GQ_{n-1}(x)$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $GQ_0(x) = 2 - 2xi, GQ_1(x) = 2x + 2i$ ต่อมา H. Gokas [6] ได้ให้นิยามของจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์ และจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส เมื่อ

*ผู้นำเสนอ (644254050@parichat.skru.ac.th)

†ผู้ประพันธ์บรรณกิจ (pattarawan.pe@skru.ac.th)

P_n และ Q_n เป็นพจน์ที่ n ของจำนวนเพลล์ และจำนวนเพลล์-ลูคัส จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $BGP_n = 2BGP_{n-1} + BGP_{n-2}$ และ $BGQ_n = 2BGQ_{n-1} + BGQ_{n-2}$

การทำวิจัยในครั้งนี้ผู้จัดทำสนใจที่จะศึกษาพหุนามเพลล์ และพหุนามเพลล์-ลูคัส และจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์ และจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส ได้ศึกษาเพิ่มเติมให้อยู่ในรูปพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส และศึกษาผลคูณ ผลต่าง ผลบวก ผลบวกย่อย ผลบวกย่อยพจน์คู่ ผลบวกย่อยพจน์คี่ เมทริกซ์ รวมถึงสังยุคที่เกี่ยวข้องกับพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

2 ความรู้พื้นฐาน

A. Dasdemir [2] ได้ศึกษาลำดับของจำนวนเพลล์ ดังนี้

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, \dots$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนเพลล์ กำหนดโดย

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 2 \text{ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น } P_0 = 0, P_1 = 1 \quad (2.1)$$

สูตรปิดของจำนวนเพลล์ คือ

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ โดยที่ } n \geq 2 \quad (2.2)$$

เมื่อ $\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2}$

นอกจากนี้ยังได้ศึกษาลำดับของจำนวนเพลล์-ลูคัส

$$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, \dots$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนเพลล์-ลูคัส กำหนดโดย

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, n \geq 2 \text{ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น } Q_0 = 2, Q_1 = 2 \quad (2.3)$$

สูตรปิดของจำนวนเพลล์-ลูคัส คือ

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n \text{ โดยที่ } n \geq 2 \quad (2.4)$$

เมื่อ $\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2}$

H. Gokbas [6] ได้ให้นิยามของจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์ BGP_n ดังนี้

$$BGP_n = P_n + iP_{n-1} + jP_{n-2} + ijP_{n-3} \quad (2.5)$$

เมื่อ i, j และ ij เป็นส่วนจินตภาพ เป็นไปตามเงื่อนไข $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji$

เมื่อ P_n เป็นพจน์ที่ n ของจำนวนเพลล์ และจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$BGP_n = 2BGP_{n-1} + BGP_{n-2} \quad (2.6)$$

สูตรบีเนตของจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์ คือ

$$BGP_n = \frac{\hat{\alpha}\alpha^{n-3} - \hat{\beta}\beta^{n-3}}{\alpha - \beta} \quad (2.7)$$

เมื่อ $\hat{\alpha} = \alpha^3 + i\alpha^2 + j\alpha + ij, \alpha = 1 + \sqrt{2}, \hat{\beta} = \beta^3 + i\beta^2 + j\beta + ij, \beta = 1 - \sqrt{2}$

ให้ BGP_n และ BGP_m เป็นจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์ใด ๆ

การบวก และการลบ นิยามโดย

$$\begin{aligned} BGP_n \pm BGP_m &= (P_n + iP_{n-1} + jP_{n-2} + ijP_{n-3}) \\ &\quad \pm (P_m + iP_{m-1} + jP_{m-2} + ijP_{m-3}) \\ &= (P_n \pm P_m) + i(P_{n-1} \pm P_{m-1}) + j(P_{n-2} \pm P_{m-2}) \\ &\quad + ij(P_{n-3} \pm P_{m-3}) \end{aligned}$$

การคูณ นิยามโดย

$$\begin{aligned} BGP_n \times BGP_m &= (P_n + iP_{n-1} + jP_{n-2} + ijP_{n-3}) \\ &\quad \times (P_m + iP_{m-1} + jP_{m-2} + ijP_{m-3}) \\ &= (P_n P_m - P_{n-1} P_{m-1} - P_{n-2} P_{m-2} + P_{n-3} P_{m-3}) \\ &\quad + i(P_n P_{m-1} + P_{n-1} P_m - P_{n-2} P_{m-3} - P_{n-3} P_{m-2}) \\ &\quad + j(P_n P_{m-2} + P_{n-2} P_m - P_{n-1} P_{m-3} - P_{n-3} P_{m-1}) \\ &\quad + ij(P_n P_{m-3} + P_{n-3} P_m + P_{n-1} P_{m-2} + P_{n-2} P_{m-1}) \\ &= BGP_m \times BGP_n \end{aligned}$$

สังยุคจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์ กำหนด 3 แบบต่อไปนี้

$$(BGP_n)_i^* = P_n - iP_{n-1} + jP_{n-2} - ijP_{n-3} \quad (2.8)$$

$$(BGP_n)_j^* = P_n + iP_{n-1} - jP_{n-2} - ijP_{n-3} \quad (2.9)$$

$$(BGP_n)_{ij}^* = P_n - iP_{n-1} - jP_{n-2} + ijP_{n-3} \quad (2.10)$$

และจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส นิยามดังนี้

$$BGQ_n = Q_n + iQ_{n-1} + jQ_{n-2} + ijQ_{n-3} \quad (2.11)$$

เมื่อ Q_n เป็นพจน์ที่ n ของจำนวนเพลล์-ลูคัส และจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$BGQ_n = 2BGQ_{n-1} + BGQ_{n-2} \quad (2.12)$$

สูตรบีเนตของจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส คือ

$$BGQ_n = \hat{\alpha}\alpha^{n-3} + \hat{\beta}\beta^{n-3} \quad (2.13)$$

เมื่อ $\hat{\alpha} = \alpha^3 + i\alpha^2 + j\alpha + ij, \alpha = 1 + \sqrt{2}, \hat{\beta} = \beta^3 + i\beta^2 + j\beta + ij, \beta = 1 - \sqrt{2}$

ให้ BGQ_n และ BGQ_m เป็นจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสใด ๆ

การบวกและการลบ นิยามโดย

$$\begin{aligned} BGQ_n \pm BGQ_m &= (Q_n + iQ_{n-1} + jQ_{n-2} + ijQ_{n-3}) \\ &\quad \pm (Q_m + iQ_{m-1} + jQ_{m-2} + ijQ_{m-3}) \\ &= (Q_n \pm Q_m) + i(Q_{n-1} \pm Q_{m-1}) + j(Q_{n-2} \pm Q_{m-2}) \\ &\quad + ij(Q_{n-3} \pm Q_{m-3}) \end{aligned}$$

การคูณ นิยามโดย

$$\begin{aligned} BGQ_n \times BGQ_m &= (Q_n + iQ_{n-1} + jQ_{n-2} + ijQ_{n-3}) \\ &\quad \times (Q_m + iQ_{m-1} + jQ_{m-2} + ijQ_{m-3}) \\ &= (Q_nQ_m - Q_{n-1}Q_{m-1} - Q_{n-2}Q_{m-2} + Q_{n-3}Q_{m-3}) \\ &\quad + i(Q_nQ_{m-1} + Q_{n-1}Q_m - Q_{n-2}Q_{m-3} - Q_{n-3}Q_{m-2}) \\ &\quad + j(Q_nQ_{m-2} + Q_{n-2}Q_m - Q_{n-1}Q_{m-3} - Q_{n-3}Q_{m-1}) \\ &\quad + ij(Q_nQ_{m-3} + Q_{n-3}Q_m + Q_{n-1}Q_{m-2} + Q_{n-2}Q_{m-1}) \\ &= BGQ_m \times BGQ_n \end{aligned}$$

สังยุคจำนวนไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส มี 3 รูปแบบดังต่อไปนี้

$$(BGQ_n)_i^* = Q_n - iP_{n-1} + jQ_{n-2} - ijQ_{n-3} \quad (2.14)$$

$$(BGQ_n)_j^* = Q_n + iP_{n-1} - jQ_{n-2} - ijQ_{n-3} \quad (2.15)$$

$$(BGQ_n)_{ij}^* = Q_n - iQ_{n-1} - jQ_{n-2} + ijQ_{n-3} \quad (2.16)$$

A. F. Horadam และ Bro. J. M. Mohon [3] ได้ศึกษาพหุนามเพลล์โดยให้นิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดของพหุนามเพลล์ กำหนดโดย

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), n \geq 2 \quad (2.17)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $P_0(x) = 0, P_1(x) = 1$

สูตรบีเนตของพหุนามเพลล์ คือ

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}, n \geq 2 \quad (2.18)$$

เมื่อ $\alpha = x + \sqrt{x^2 + 1}$ และ $\beta = x - \sqrt{x^2 + 1}$

และความสัมพันธ์เวียนเกิดของพหุนามเพลล์-ลูคัส กำหนดโดย

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (2.19)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x$

สูตรบีเนตของพหุนามเพลล์-ลูคัส คือ

$$Q_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x), \quad n \geq 2 \quad (2.20)$$

เมื่อ $\alpha = x + \sqrt{x^2 + 1}$ และ $\beta = x - \sqrt{x^2 + 1}$

จะได้เอกลักษณ์ของพหุนามเพลล์ และพหุนามเพลล์-ลูคัส ดังนี้

$$P_{-n}(x) = (-1)^{n+1}P_n(x) \quad (2.21)$$

$$Q_{-n}(x) = (-1)^n Q_n(x) \quad (2.22)$$

$$P_{2n+1}(x) = P_{n+1}^2(x) + P_n^2(x) \quad (2.23)$$

$$Q_n(x) = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \quad (2.24)$$

$$Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x) = 4(x^2 + 1)P_n(x) \quad (2.25)$$

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x) \quad (2.26)$$

$$Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) + Q_n(x) \quad (2.27)$$

$$2xP_n(x) + 2P_{n-1}(x) = Q_n(x) \quad (2.28)$$

$$P_n(x)Q_n(x) = P_{2n}(x) \quad (2.29)$$

$$\sum_{k=1}^n P_k(x) = \frac{P_{n+1}(x) + P_n(x) - 1}{2x} \quad (2.30)$$

$$\sum_{k=1}^n P_{2k-1}(x) = \frac{P_{2n}(x)}{2x} \quad (2.31)$$

$$\sum_{k=1}^n P_{2k}(x) = \frac{P_{2n+1}(x) - 1}{2x} \quad (2.32)$$

$$\sum_{k=1}^n Q_k(x) = \frac{Q_{n+1}(x) + Q_n(x) - 2x - 2}{2x} \quad (2.33)$$

$$\sum_{k=1}^n Q_{2k}(x) = \frac{Q_{2n+1}(x) - 2}{2x} \quad (2.34)$$

$$\sum_{k=1}^n Q_{2k-1}(x) = \frac{Q_{2n}(x) - 2}{2x} \quad (2.35)$$

$$Q_{n+r}^2(x) - Q_{n-r}^2(x) = 4(x^2 + 1)P_{2n}(x)P_{2r}(x) \quad (2.36)$$

$$P_n^2(x) - P_{n+r}(x)P_{n-r}(x) = (-1)^{n-r}P_r^2(x) \quad (2.37)$$

$$Q_n^2(x) - Q_{n+r}(x)Q_{n-r}(x) = (-1)^{n-r+1}4(x^2+1)P_r^2(x) \quad (2.38)$$

$$P_{n+h}(x)P_{n+k}(x) - P_n(x)P_{n+h+k}(x) = (-1)^n P_h(x)P_k(x) \quad (2.39)$$

$$P_{n+r}(x) + P_{n-r}(x) = \begin{cases} P_n(x)Q_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ Q_n(x)P_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$Q_{n+r}(x) + Q_{n-r}(x) = \begin{cases} Q_n(x)Q_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 4(x^2+1)P_n(x)P_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad (2.41)$$

$$P_{n+r}(x) - P_{n-r}(x) = \begin{cases} Q_n(x)P_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ P_n(x)P_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad (2.42)$$

$$Q_{n+r}(x) - Q_{n-r}(x) = \begin{cases} 4(x^2+1)P_n(x)P_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ Q_n(x)Q_r(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad (2.43)$$

E. Ozkan และ T. Alp [1] ได้ให้นิยามพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ $BGP_n(x)$ นิยามโดย

$$BGP_n(x) = P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x) \quad (2.44)$$

เมื่อ $P_n(x)$ เป็นพจน์ที่ n ของพหุนามเพลล์ และจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ ดังนี้

$$BGP_n(x) = 2xBGP_{n-1}(x) + BGP_{n-2}(x) \quad (2.45)$$

สูตรบีเนตของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ คือ

$$BGP_n(x) = \frac{\hat{\alpha}\alpha^{n-3}(x) - \hat{\beta}\beta^{n-3}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad (2.46)$$

และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส $BGQ_n(x)$ นิยามโดย

$$BGQ_n(x) = Q_n(x) + iQ_{n-1}(x) + jQ_{n-2}(x) + ijQ_{n-3}(x) \quad (2.47)$$

เมื่อ $Q_n(x)$ เป็นพจน์ทั่วไปของพหุนามเพลล์-ลูคัส และจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

$$BGQ_n(x) = 2xBGQ_{n-1}(x) + BGQ_{n-2}(x) \quad (2.48)$$

สูตรบีเนตของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส คือ

$$BGQ_n(x) = \hat{\alpha}\alpha^{n-3}(x) + \hat{\beta}\beta^{n-3}(x) \quad (2.49)$$

3 ผลการศึกษา

ในบทนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส รวมถึงผลบวก ผลต่าง ผลคูณ ผลบวกย่อย ผลบวกย่อยพจน์คู่ ผลบวกย่อยพจน์คี่ เมทริกซ์ และสังยุคต่าง ๆ ของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

3.1 สมบัติบางประการของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์

จากพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ ซึ่งกำหนดโดย

$$BGP_n(x) = P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x)$$

สังยุคของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ มี 3 แบบดังต่อไปนี้

$$(BGP_n(x))_i^* = P_n(x) - iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) - ijP_{n-3}(x) \quad (3.1)$$

$$(BGP_n(x))_j^* = P_n(x) + iP_{n-1}(x) - jP_{n-2}(x) - ijP_{n-3}(x) \quad (3.2)$$

$$(BGP_n(x))_{ij}^* = P_n(x) - iP_{n-1}(x) - jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x) \quad (3.3)$$

ทฤษฎีบท 3.1. ให้ $BGP_n(x)$ และ $BGP_m(x)$ เป็นพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ใด ๆ จะได้สังยุคของผลคูณของสองจำนวน ดังนี้

- 1) $(BGP_n(x) \times BGP_m(x))_i^* = (BGP_n(x))_i^* \times (BGP_m(x))_i^*$
- 2) $(BGP_n(x) \times BGP_m(x))_j^* = (BGP_n(x))_j^* \times (BGP_m(x))_j^*$
- 3) $(BGP_n(x) \times BGP_m(x))_{ij}^* = (BGP_n(x))_{ij}^* \times (BGP_m(x))_{ij}^*$

พิสูจน์. 1) พิจารณา

$$\begin{aligned} & (BGP_n(x) \times BGP_m(x))_i^* \\ &= [(P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x)) \times (P_m(x) \\ & \quad + iP_{m-1}(x) + jP_{m-2}(x) + ijP_{m-3}(x))]_i^* \\ &= [P_n(x)P_m(x) + iP_n(x)P_{m-1}(x) + jP_n(x)P_{m-2}(x) + ijP_n(x)P_{m-3}(x) \\ & \quad + iP_{n-1}(x)P_m(x) + i^2P_{n-1}(x)P_{m-1}(x) + ijP_{n-1}(x)P_{m-2}(x) \\ & \quad + i^2jP_{n-1}(x)P_{m-3}(x) + jP_{n-2}(x)P_m(x) + ijP_{n-2}(x)P_{m-1}(x) \\ & \quad + j^2P_{n-2}(x)P_{m-2}(x) + ij^2P_{n-2}(x)P_{m-3}(x) + ijP_{n-3}(x)P_m(x) \\ & \quad + i^2jP_{n-3}(x)P_{m-1}(x) + ij^2P_{n-3}(x)P_{m-2}(x) + i^2j^2P_{n-3}(x)P_{m-3}(x)]_i^* \\ &= [P_n(x)P_m(x) + iP_n(x)P_{m-1}(x) + jP_n(x)P_{m-2}(x) + ijP_n(x)P_{m-3}(x) \\ & \quad + iP_{n-1}(x)P_m(x) - P_{n-1}(x)P_{m-1}(x) + ijP_{n-1}(x)P_{m-2}(x) \\ & \quad - jP_{n-1}(x)P_{m-3}(x) + jP_{n-2}(x)P_m(x) + ijP_{n-2}(x)P_{m-1}(x) \\ & \quad - P_{n-2}(x)P_{m-2}(x) - iP_{n-2}(x)P_{m-3}(x) + ijP_{n-3}(x)P_m(x) \\ & \quad - jP_{n-3}(x)P_{m-1}(x) - iP_{n-3}(x)P_{m-2}(x) + P_{n-3}(x)P_{m-3}(x)]_i^* \\ &= [(P_n(x)P_m(x) - P_{n-1}(x)P_{m-1}(x) - P_{n-2}(x)P_{m-2}(x) + P_{n-3}(x)P_{m-3}(x)) \\ & \quad + i(P_n(x)P_{m-1}(x) + P_{n-1}(x)P_m(x) - P_{n-2}(x)P_{m-3}(x) - P_{n-3}(x)P_{m-2}(x)) \\ & \quad + j(P_n(x)P_{m-2}(x) - P_{n-1}(x)P_{m-3}(x) + P_{n-2}(x)P_m(x) - P_{n-3}(x)P_{m-1}(x)) \\ & \quad + ij(P_n(x)P_{m-3}(x) + P_{n-1}(x)P_{m-2}(x) + P_{n-2}(x)P_{m-1}(x) + P_{n-3}(x)P_m(x))]_i^* \\ &= (P_n(x)P_m(x) - P_{n-1}(x)P_{m-1}(x) - P_{n-2}(x)P_{m-2}(x) + P_{n-3}(x)P_{m-3}(x)) \\ & \quad - i(P_n(x)P_{m-1}(x) + P_{n-1}(x)P_m(x) - P_{n-2}(x)P_{m-3}(x) - P_{n-3}(x)P_{m-2}(x)) \\ & \quad + j(P_n(x)P_{m-2}(x) - P_{n-1}(x)P_{m-3}(x) + P_{n-2}(x)P_m(x) - P_{n-3}(x)P_{m-1}(x)) \\ & \quad - ij(P_n(x)P_{m-3}(x) + P_{n-1}(x)P_{m-2}(x) + P_{n-2}(x)P_{m-1}(x) + P_{n-3}(x)P_m(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (P_n(x) - iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) - ijP_{n-3}(x)) \times (P_m(x) - iP_{m-1}(x) \\
 &\quad + jP_{m-2}(x) - ijP_{m-3}(x)) \\
 &= (BGP_n(x))_i^* \times (BGP_m(x))_i^*
 \end{aligned}$$

การพิสูจน์ 2) และ 3) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

ทฤษฎีบท 3.2. ให้ $BGP_n(x)$ เป็นพหุนามไบเเกาส์เซียนเพลสโตใด ๆ และ $(BGP_n(x))_i^*$, $(BGP_n(x))_j^*$ และ $(BGP_n(x))_{ij}^*$ เป็นสิ่งยุค 3 แบบของจำนวนไบเเกาส์เซียนเพลสโต จะได้

- 1) $BGP_n(x) - (BGP_n(x))_i^* = 2i(P_{n-1}(x) + jP_{n-3}(x))$
- 2) $BGP_n(x) + (BGP_n(x))_i^* = 2(P_n(x) + jP_{n-3}(x))$
- 3) $BGP_n(x) - (BGP_n(x))_j^* = 2j(P_{n-2}(x) + iP_{n-3}(x))$
- 4) $BGP_n(x) + (BGP_n(x))_j^* = 2(P_n(x) + iP_{n-1}(x))$
- 5) $BGP_n(x) - (BGP_n(x))_{ij}^* = 2(iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x))$
- 6) $BGP_n(x) + (BGP_n(x))_{ij}^* = 2(P_n(x) + ijP_{n-3}(x))$

พิสูจน์. 1) พิจารณา

$$\begin{aligned}
 &BGP_n(x) - (BGP_n(x))_i^* \\
 &= (P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x)) - (P_n(x) - iP_{n-1}(x) \\
 &\quad + jP_{n-2}(x) - ijP_{n-3}(x)) \\
 &= P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x) - P_n(x) + iP_{n-1}(x) \\
 &\quad - jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x) \\
 &= 2iP_{n-1}(x) + 2ijP_{n-3}(x) \\
 &= 2i(P_{n-1}(x) + jP_{n-3}(x))
 \end{aligned}$$

2) พิจารณา

$$\begin{aligned}
 &BGP_n(x) + (BGP_n(x))_i^* \\
 &= (P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x)) + (P_n(x) - iP_{n-1}(x) \\
 &\quad + jP_{n-2}(x) - ijP_{n-3}(x)) \\
 &= 2P_n(x) + 2jP_{n-2}(x) \\
 &= 2(P_n(x) + jP_{n-2}(x))
 \end{aligned}$$

การพิสูจน์ 3), 4), 5) และ 6) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

ทฤษฎีบท 3.3. ให้ $BGP_n(x)$ เป็นพหุนามไบเเกาส์เซียนเพลสโตใด ๆ จะได้

- 1) $\sum_{k=1}^n BGP_k(x) = \frac{1}{2x}(BGP_{n+1}(x) + BGP_n(x) - 4(x^2 - x + 1))$
- 2) $\sum_{k=1}^n BGP_{2k-1}(x) = \frac{1}{2x}(BGP_{2n}(x) - 2(2x^2 - x + 1))$
- 3) $\sum_{k=1}^n BGP_{2k}(x) = \frac{1}{2x}(BGP_{2n+1}(x) + 2(x - 1))$

พิสูจน์. 1) จากเอกลักษณ์ (2.21) และ (2.31)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n BGP_k(x) &= \sum_{k=1}^n (P_k(x) + iP_{k-1}(x) + jP_{k-2}(x) + ijP_{k-3}(x)) \\
&= \sum_{k=1}^n P_k(x) + i \sum_{k=1}^n P_{k-1}(x) + j \sum_{k=1}^n P_{k-2}(x) + ij \sum_{k=1}^n P_{k-3}(x) \\
&= \sum_{k=1}^n P_k(x) + i \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) + j \sum_{k=-1}^{n-2} P_k(x) + ij \sum_{k=-2}^{n-3} P_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^n P_k(x) + i \left(P_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(x) \right) + j \left(P_{-1}(x) + P_0(x) + \sum_{k=1}^{n-2} P_k(x) \right) \\
&\quad + ij \left(P_{-2}(x) + P_{-1}(x) + P_0(x) + \sum_{k=1}^{n-3} P_k(x) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n P_k(x) + i \left(P_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(x) \right) \\
&\quad + j \left((-1)^{1+1} P_1(x) + P_0(x) + \sum_{k=1}^{n-2} P_k(x) \right) \\
&\quad + ij \left((-1)^{2+1} P_2(x) + (-1)^{1+1} P_1(x) + P_0(x) + \sum_{k=1}^{n-3} P_k(x) \right) \\
&= \left(\frac{P_{n+1}(x) + P_n(x) - 1}{2x} \right) + i \left(+0 + \frac{P_n(x) + P_{n-1}(x) - 1}{2x} \right) \\
&\quad + j \left(1 + 0 + \frac{P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) - 1}{2x} \right) \\
&\quad + ij \left(-2x + 1 + 0 + \frac{P_{n-2}(x) + P_{n-3}(x) - 1}{2x} \right) \\
&= \left(\frac{P_{n+1}(x) + P_n(x) - 1}{2x} \right) + i \left(\frac{P_n(x) + P_{n-1}(x) - 1}{2x} \right) \\
&\quad + j \left(\frac{P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) + 2x - 1}{2x} \right) \\
&\quad + ij \left(\frac{P_{n-2}(x) + P_{n-3}(x) - 4x^2 + 2x - 1}{2x} \right) \\
&= \left(\frac{P_{n+1}(x) + iP_n(x) + jP_{n-1}(x) + ijP_{n-2}(x)}{2x} \right) \\
&\quad + \left(\frac{P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x)}{2x} \right) \\
&\quad + \left(\frac{-4x^2 + 4x - 4}{2x} \right) \\
&= \frac{1}{2x} (BGP_{n+1}(x) + BGP_n(x) - 4(x^2 - x + 1))
\end{aligned}$$

การพิสูจน์ 2) และ 3) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

ทฤษฎีบท 3.4. ให้ $BGP_n(x)$ เป็นพหุนามไบเกราส์เซียนเพลสดีใด ๆ จะได้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} BGP_0(x) \\ BGP_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BGP_n(x) \\ BGP_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

พิสูจน์. พิจารณา

$$\text{ให้ } P(n) \text{ แทนข้อความ } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} BGP_0(x) \\ BGP_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BGP_n(x) \\ BGP_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

ขั้นฐาน ให้ $n = 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} BGP_0(x) \\ BGP_1(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} BGP_1(x) \\ BGP_0(x) + 2xBGP_1(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} BGP_1(x) \\ BGP_2(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

$$\text{ขั้นอุปนัย สมมติให้ } P(k) \text{ เป็นจริง นั่นคือ } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} BGP_0(x) \\ BGP_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BGP_k(x) \\ BGP_{k+1}(x) \end{bmatrix}$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} BGP_0(x) \\ BGP_1(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} BGP_0(x) \\ BGP_1(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BGP_k(x) \\ BGP_{k+1}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} BGP_{k+1}(x) \\ BGP_k(x) + 2xBGP_{k+1}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} BGP_{k+1}(x) \\ BGP_{k+2}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

$$\text{นั่นคือ } \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 2x \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} BGP_0(x) \\ BGP_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BGP_n(x) \\ BGP_{n+1}(x) \end{bmatrix} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 3.5. ให้ n และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$1) BGP_{n+r}(x) + BGP_{n-r}(x) = \begin{cases} Q_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ P_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

$$2) BGP_{n+r}(x) - BGP_{n-r}(x) = \begin{cases} P_r(x)BGQ_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ Q_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์. แบ่งพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มคู่

พิจารณา $BGP_{n+r}(x) + BGP_{n-r}(x)$

$$\begin{aligned} &= (P_{n+r}(x) + iP_{n+r-1}(x) + jP_{n+r-2}(x) + ijP_{n+r-3}(x)) + (P_{n-r}(x) + iP_{n-r-1}(x) \\ &\quad + jP_{n-r-2}(x) + ijP_{n-r-3}(x)) \\ &= (P_{n+r}(x) + P_{n-r}(x)) + i(P_{n-1+r}(x) + P_{n-1-r}(x)) \\ &\quad + j(P_{n-2+r}(x) + P_{n-2-r}(x)) + ij(P_{n-3+r}(x) + P_{n-3-r}(x)) \\ &= (P_n(x)Q_r(x)) + i(P_{n-1}(x)Q_r(x)) + j(P_{n-2}(x)Q_r(x)) \\ &\quad + ij(P_{n-3}(x)Q_r(x)) \\ &= Q_r(x)(P_n(x) + iP_{n-1}(x) + jP_{n-2}(x) + ijP_{n-3}(x)) \\ &= Q_r(x)BGP_n(x) \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มคี่

พิจารณา $BGP_{n+r}(x) + BGP_{n-r}(x)$

$$\begin{aligned} &= (P_{n+r}(x) + iP_{n+r-1}(x) + jP_{n+r-2}(x) + ijP_{n+r-3}(x)) \\ &\quad + (P_{n-r}(x) + iP_{n-r-1}(x) + jP_{n-r-2}(x) + ijP_{n-r-3}(x)) \\ &= (P_{n+r}(x) + P_{n-r}(x)) + i(P_{n-1+r}(x) + P_{n-1-r}(x)) \\ &\quad + j(P_{n-2+r}(x) + P_{n-2-r}(x)) + ij(P_{n-3+r}(x) + P_{n-3-r}(x)) \\ &= (Q_n(x)P_r(x)) + i(Q_{n-1}(x)P_r(x)) + j(Q_{n-2}(x)P_r(x)) \\ &\quad + ij(Q_{n-3}(x)P_r(x)) \\ &= P_r(x)(Q_n(x) + iQ_{n-1}(x) + jQ_{n-2}(x) + ijQ_{n-3}(x)) \\ &= P_r(x)BGQ_n(x) \end{aligned}$$

การพิสูจน์ 2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

บทแทรก 3.6. ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$\begin{aligned} 1) BGP_{n+1}(x) + BGP_{n-1}(x) &= BGQ_n(x) \\ 2) BGP_{n+1}(x) - BGP_{n-1}(x) &= 2xBGP_n(x) \end{aligned}$$

พิสูจน์. จากทฤษฎีบท 3.5 พิจารณาเมื่อ $r = 1$ จะได้ $BGP_{n+1}(x) + BGP_{n-1}(x) = P_1(x)BGQ_n(x)$

การพิสูจน์ 2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

3.2 สมบัติบางประการของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส

ในหัวข้อนี้เราศึกษาพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสในลักษณะเดียวกันกับหัวข้อ 3.1 จากพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส กำหนดโดย

$$BGQ_n(x) = Q_n(x) + iQ_{n-1}(x) + jQ_{n-2}(x) + ijQ_{n-3}(x)$$

สังยุคของพหุนามไบเเกาส์เซียนเพลส-ลูคัส มี 3 แบบดังต่อไปนี้

$$(BGQ_n(x))^*_i = Q_n(x) - iQ_{n-1}(x) + jQ_{n-2}(x) - ijQ_{n-3}(x) \quad (3.4)$$

$$(BGQ_n(x))^*_j = Q_n(x) + iQ_{n-1}(x) - jQ_{n-2}(x) - ijQ_{n-3}(x) \quad (3.5)$$

$$(BGQ_n(x))^*_{ij} = Q_n(x) - iQ_{n-1}(x) - jQ_{n-2}(x) + ijQ_{n-3}(x) \quad (3.6)$$

ทฤษฎีบท 3.7. ให้ $BGQ_n(x)$ และ $BGQ_m(x)$ เป็นพหุนามไบเเกาส์เซียนเพลส-ลูคัสใด ๆ จะได้สังยุคของผลคูณของสองจำนวนใด ๆ ดังนี้

- 1) $(BGQ_n(x) \times BGQ_m(x))^*_i = (BGQ_n(x))^*_i \times (BGQ_m(x))^*_i$
- 2) $(BGQ_n(x) \times BGQ_m(x))^*_j = (BGQ_n(x))^*_j \times (BGQ_m(x))^*_j$
- 3) $(BGQ_n(x) \times BGQ_m(x))^*_{ij} = (BGQ_n(x))^*_{ij} \times (BGQ_m(x))^*_{ij}$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.1 □

ทฤษฎีบท 3.8. ให้ $BGQ_n(x)$ เป็นพหุนามไบเเกาส์เซียนเพลสใด ๆ และ $(BGQ_n(x))^*_i, (BGQ_n(x))^*_j$ และ $(BGQ_n(x))^*_{ij}$ เป็นสังยุค 3 แบบของจำนวนไบเเกาส์เซียนเพลส จะได้

- 1) $BGQ_n(x) - (BGQ_n(x))^*_i = 2i(Q_{n-1}(x) + jQ_{n-3}(x))$
- 2) $BGQ_n(x) + (BGQ_n(x))^*_i = 2(Q_n(x) + jQ_{n-2}(x))$
- 3) $BGQ_n(x) - (BGQ_n(x))^*_j = 2j(Q_{n-2}(x) + iQ_{n-3}(x))$
- 4) $BGQ_n(x) + (BGQ_n(x))^*_j = 2(Q_n(x) + iQ_{n-1}(x))$
- 5) $BGQ_n(x) - (BGQ_n(x))^*_{ij} = 2(iQ_{n-1}(x) + jQ_{n-2}(x))$
- 6) $BGQ_n(x) + (BGQ_n(x))^*_{ij} = 2(Q_n(x) + ijQ_{n-3}(x))$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2 □

ทฤษฎีบท 3.9. ให้ $BGQ_n(x)$ เป็นพหุนามไบเเกาส์เซียนเพลส-ลูคัสใด ๆ จะได้

- 1) $\sum_{k=1}^n BGQ_k(x) = \frac{1}{2x}(BGQ_{n+1}(x) + BGQ_n(x) + 8(x-1)(x^4+1))$
- 2) $\sum_{k=1}^n BGQ_{2k-1}(x) = \frac{1}{2x}(BGQ_{2n}(x) + 4(2x-1)(x^2+1))$
- 3) $\sum_{k=1}^n BGQ_{2k}(x) = \frac{1}{2x}(BGQ_{2n+1}(x) - 4(x^2+1))$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.3 □

ทฤษฎีบท 3.10. ให้ $BGQ_n(x)$ เป็นพหุนามไบเเกาส์เซียนเพลส-ลูคัสและ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} BGQ_0(x) \\ BGQ_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BGQ_n(x) \\ BGQ_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.4 โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ □

ทฤษฎีบท 3.11. ให้ n และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$1) BGQ_{n+r}(x) + BGQ_{n-r}(x) = \begin{cases} Q_r(x)BGQ_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 4(x^2 + 1)P_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

$$2) BGQ_{n+r}(x) - BGQ_{n-r}(x) = \begin{cases} 4(x^2 + 1)P_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ Q_r(x)BGQ_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์. ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.5 □

บทแทรก 3.12. ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$1) BGQ_{n+1}(x) + BGQ_{n-1}(x) = 4(x^2 + 1)BGP_n(x)$$

$$2) BGQ_{n+1}(x) - BGQ_{n-1}(x) = 2x BGQ_n(x)$$

พิสูจน์. 1) จากทฤษฎีบท 3.11 พิจารณาเมื่อ $r = 1$ จะได้

$$BGQ_{n+1}(x) + BGQ_{n-1}(x) = 4(x^2 + 1)P_1(x)BGP_n(x)$$

การพิสูจน์ 2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

4 สรุปผลและอภิปรายผล

งานวิจัยนี้ศึกษาสมบัติบางประการของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส โดยได้ศึกษาผลคูณ ผลบวก และผลต่างระหว่างพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ กับสังยุคของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และศึกษาผลคูณ ผลบวก และผลต่างระหว่างพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส กับสังยุคของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส ในลักษณะเดียวกัน นอกจากนี้ยังได้ศึกษาผลบวก ผลต่าง ผลบวกย่อย ผลบวกย่อยพจน์คู่ ผลบวกย่อยพจน์คี่ และเมทริกซ์ของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส ซึ่งผลการศึกษานี้สามารถเขียนผลบวกย่อย ผลบวกย่อยพจน์คี่ และพจน์คู่ของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ ได้ดังนี้

$$\sum_{k=1}^n BGP_k(x) = \frac{1}{2x}(BGP_{n+1}(x) + BGP_n(x) - 4(x^2 - x + 1))$$

$$\sum_{k=1}^n BGP_{2k-1}(x) = \frac{1}{2x}(BGP_{2n}(x) - 2(2x^2 - x + 1)) \text{ และ}$$

$$\sum_{k=1}^n BGP_{2k}(x) = \frac{1}{2x}(BGP_{2n+1}(x) + 2(x - 1)) \text{ ตามลำดับ}$$

สามารถเขียนผลบวกย่อย ผลบวกย่อยพจน์คี่ และพจน์คู่ของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส ได้ดังนี้

$$\sum_{k=1}^n BGQ_k(x) = \frac{1}{2x}(BGQ_{n+1}(x) + BGQ_n(x) + 8(x - 1)(x^4 + 1))$$

$$\sum_{k=1}^n BGQ_{2k-1}(x) = \frac{1}{2x}(BGQ_{2n}(x) + 4(2x - 1)(x^2 + 1)) \text{ และ}$$

$$\sum_{k=1}^n BGQ_{2k}(x) = \frac{1}{2x}(BGQ_{2n+1}(x) - 4(x^2 + 1)) \text{ ตามลำดับ}$$

สามารถเขียนผลบวก และผลต่าง ของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ ได้ดังนี้

$$BGP_{n+r}(x) + BGP_{n-r}(x) = \begin{cases} Q_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ P_r(x)BGQ_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

$$BGP_{n+r}(x) - BGP_{n-r}(x) = \begin{cases} P_r(x)BGQ_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ Q_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

สามารถเขียนผลบวก และผลต่างของพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัส ได้ดังนี้

$$BGQ_{n+r}(x) + BGQ_{n-r}(x) = \begin{cases} Q_r(x)BGQ_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 4(x^2 + 1)P_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

$$BGQ_{n+r}(x) - BGQ_{n-r}(x) = \begin{cases} 4(x^2 + 1)P_r(x)BGP_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ Q_r(x)BGQ_n(x) & \text{เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

นอกจากนี้เราสามารถศึกษาทฤษฎีบทอื่น ๆ เกี่ยวกับพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์ และพหุนามไบเกาส์เซียนเพลล์-ลูคัสได้ในงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] E. Ozkan and T. Alp, biGaussian Pell and Pell-Lucas polynomials, Arts and Sciences 53 (3) (2022) 17–25.
- [2] A. Dasdemir, On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell numbers by Matrix Method, Arts and Sciences 64 (5) (2011) 3173–3181.
- [3] A. F. Horadam and Bro. J. M. Mahon, Pell and Pell-Lucas polynomials, Australia (1983) .
- [4] S. Halici and S. Oz, On Gaussian Pell polynomials and Their some properties, Palestine Journal of Mathematics. 7 (1) (2018) 251–256.
- [5] T. Yagmur, Gaussian Pell-Lucas polynomials, Communications in Mathematics and Applications. 10 (4) (2019) 1609–1617.
- [6] H. Gokbas, A note on biGaussian Pell and Pell-Lucas numbers, Sciences and Arts 56 (3) (2021) 669–680.